

Oplossing PRIME breinbreker januari–februari 2010

Jeroen Demeyer

2010–03–11

1 Het probleem

Het vraagstuk is duidelijk een probleem over grafen. Hier definiëren we een *graaf* als een eindige verzameling G van *toppen* en een *edge-functie* $e : V^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Twee verschillende toppen x en y zijn dan verbonden als en slechts als $e(x, y) = 1$. Deze edge-functie is symmetrisch ($e(x, y) = e(y, x)$) en anti-reflexief ($e(x, x) = 0$).

Het probleem is dan het volgende:

Probleem 1.1. Gegeven een graaf G met een edge-functie $e : V^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Toon aan dat er een deelverzameling D van V bestaat (de verzameling van knopjes waar we op drukken) zodat voor elke $x \in V$ de volgende verzameling een oneven aantal elementen heeft:

$$D \cap (\{x\} \cup \{y \in V \mid e(x, y) = 1\}).$$

We kunnen dit nog herformuleren door de verzameling D te vervangen door een functie $d : V \rightarrow \{0, 1\}$. Noem $\mathbb{F}_2$ het veld met 2 elementen (soms wordt dit veld als GF(2) genoteerd, maar uit gewoonte schrijf ik $\mathbb{F}_2$). Met de functie d wordt de voorwaarde: voor alle $x \in V$ geldt:

$$d(x) + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} d(y)e(x, y) = 1 \quad (\text{in } \mathbb{F}_2). \quad (1)$$

2 Veralgemening

Zoals vaak in de wiskunde, kunnen we dit probleem oplossen door het te veralgemenen. We vervangen het veld $\mathbb{F}_2$ door $\mathbb{F}_4$. Om straks gemakkelijker tekeningen te kunnen maken, noteren we de elementen uit $\mathbb{F}_4$ als $\{0, 1, \blacksquare, \blacksquare\}$. We hebben de rekenregels $\blacksquare + \blacksquare = 1$, $\blacksquare^2 = \blacksquare$, $\blacksquare^2 = \blacksquare$, $\blacksquare \blacksquare = 1$ en natuurlijk $2 = 0$.

We veralgemen het graaf G door als edge-functie een functie $e : V^2 \rightarrow \mathbb{F}_4$ te nemen. Als we zo'n graaf tekenen, zetten we labels op de bogen met de waarde $e(x, y)$. Voor concrete grafen kunnen we ook de bogen kleuren volgens de waarde van $e(x, y)$: 0 = geen boog, 1 = zwart, $\blacksquare$ = blauw, $\blacksquare$ = rood.

Probleem 2.1. Gegeven een eindig graaf G met een edge-functie $e : V^2 \rightarrow \mathbb{F}_4$. Bewijs dat er een functie $d : V \rightarrow \mathbb{F}_4$ bestaat zodat voor alle $x \in V$:

$$d(x) + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} d(y)e(x, y) = 1. \quad (2)$$

We tonen eerst aan dat het volstaat om deze veralgemening op te lossen.

Stelling 2.2. *Als we Probleem 2.1 kunnen oplossen, dan kunnen we ook Probleem 1.1 oplossen.*

Bewijs. Vertrek van een “gewoon” graaf G , met dus een edge-functie $e : V^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$. Stel nu dat $d : V \rightarrow \mathbb{F}_4$ een oplossing is van Probleem 2.1 voor dit graaf. Definieer de transfer-functie $\pi : \mathbb{F}_4 \rightarrow \mathbb{F}_2$ als volgt:

$$\pi(0) = 0, \pi(1) = 1, \pi(\blacksquare) = 0, \pi(\blacksquare) = 1.$$

Aangezien π de optelling respecteert, is het niet moeilijk om in te zien dat $\pi \circ d$ een oplossing is voor het probleem over $\mathbb{F}_2$. $\square$

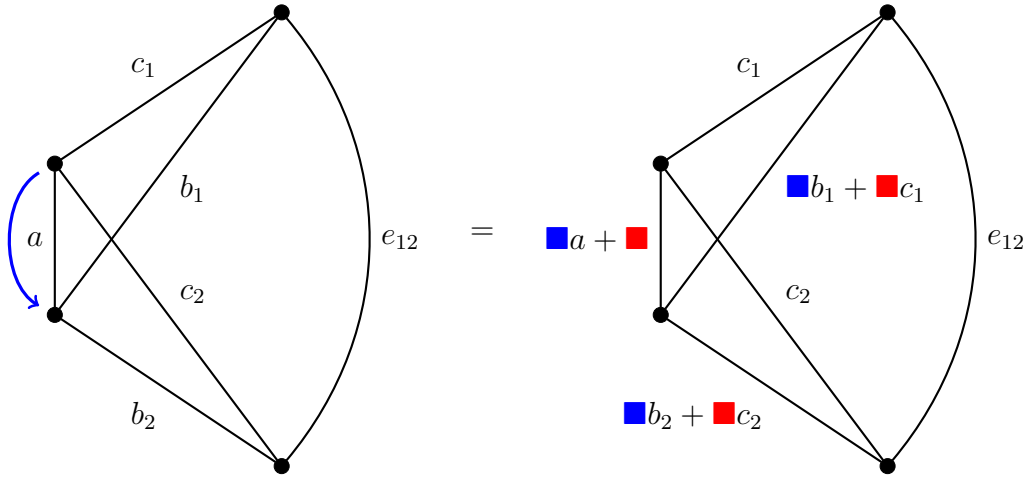
3 Transformaties

Het grote voordeel van het werken over $\mathbb{F}_4$ is dat we een bepaalde transformatie $v \xrightarrow{\text{blue}} w$ kunnen definiëren (waarbij v en w twee verschillende toppen van ons graaf zijn) die ons zal toelaten ons graaf om te zetten in een equivalent, maar eenvoudiger graaf. Het is een beetje zoals rijoperaties van een stelsel die een stelsel omzetten in een equivalent stelsel, of zoals een beweging van Rubiks kubus die een kubus-configuratie omzet in een andere kubus-configuratie.

Zij nu G een graaf (over $\mathbb{F}_4$) en $v \neq w$ twee toppen van G . Dan geeft de transformatie $v \xrightarrow{\text{blue}} w$ een nieuw graaf G' met dezelfde verzameling toppen maar een nieuwe edge-functie $e' : V \rightarrow \mathbb{F}_4$ volgens deze regels:

1. $e'(v, w) = \blacksquare e(v, w) + \blacksquare$.
2. $e'(x, w) = \blacksquare e(x, w) + \blacksquare e(x, v)$ voor alle $x \in V \setminus \{v, w\}$.
3. $e'(x, y) = e(x, y)$ in de andere gevallen ($x \neq w$ en $y \neq w$).

We illustreren dit met de volgende figuur. De labels a, b_1, c_1, b_2, c_2 en e_{12} zijn de waarden van $e(x, y)$:



Deze transformatie is interessant omdat we ze kunnen gebruiken om Probleem 2.1 op te lossen. Stel dat $d' : V \rightarrow \mathbb{F}_4$ een oplossing is voor Probleem 2.1 voor G' . Dan definiëren we $d : V \rightarrow \mathbb{F}_4$ als volgt:

- $d(w) = \blacksquare d'(w)$.
- $d(v) = d'(v) + \blacksquare d'(w)$.
- $d(x) = d'(x)$ voor de andere toppen x .

Propositie 3.1. *Zij G' een graaf en d' een oplossing voor Probleem 2.1 voor dit graaf. Als we d zoals hierboven definiëren, dan is d een oplossing voor Probleem 2.1 voor het graaf G .*

Bewijs. We moeten volgende gelijkheid aantonen voor alle $x \in V$:

$$d(x) + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} d(y)e(x, y) + 1 = 0.$$

Er zit helaas niets anders op dan deze gelijkheid uit te werken in de verschillende gevallen, gebruik makend van het feit dat de analoge gelijkheid voor d' en e' geldt. Voor $x = v$ hebben we:

$$\begin{aligned} & d(v) + \sum_{y \in V \setminus \{v\}} d(y)e(v, y) + 1 \\ &= d(v) + d(w)e(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d(y)e(v, y) + 1 \\ &= (d'(v) + \blacksquare d'(w)) + d'(w)\blacksquare e(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e'(v, y) + 1 \\ &= d'(v) + d'(w)e'(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e'(v, y) + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Voor $x = w$ krijgen we:

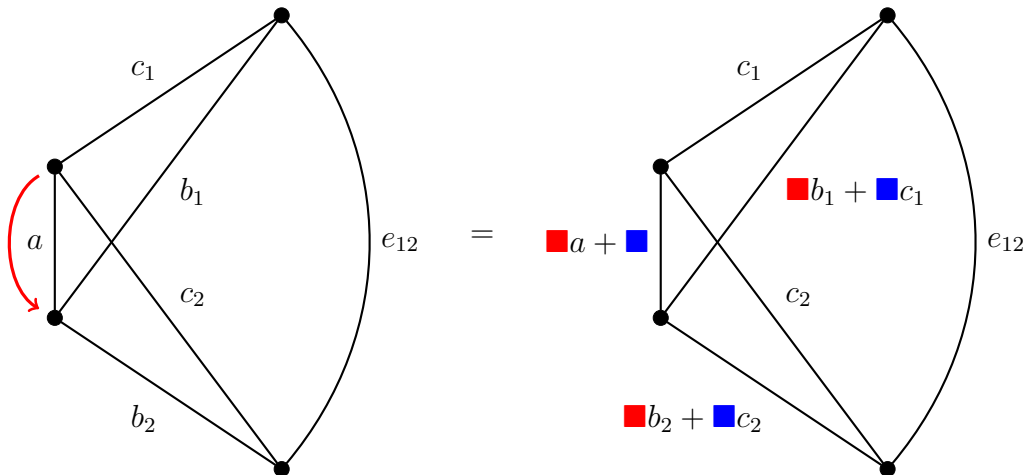
$$\begin{aligned}
& d(w) + \sum_{y \in V \setminus \{w\}} d(y)e(w, y) + 1 \\
&= d(w) + d(v)e(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e(w, y) + \blacksquare + \blacksquare \\
&= d(w) + d(v)e(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e(w, y) + \blacksquare + \blacksquare \left(d'(v) + d'(w)e'(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e'(v, y) \right) \\
&= d(w) + d(v)e(v, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)(e(w, y) + \blacksquare e(v, y)) + \blacksquare + \blacksquare (d'(v) + d'(w)e'(v, w)) \\
&= d(w) + d(v)e(v, w) + \blacksquare \sum_{y \in V \setminus \{v, w\}} d'(y)e'(w, y) + \blacksquare + \blacksquare (d'(v) + d'(w)e'(v, w)) \\
&= \blacksquare d'(w) + d(v)e(v, w) + \blacksquare (d'(w) + d'(v)e'(v, w)) + \blacksquare (d'(v) + d'(w)e'(v, w)) \\
&= (\blacksquare d'(v) + d'(w)) + d(v)e(v, w) + (\blacksquare d'(v) + \blacksquare d'(w))e'(v, w) \\
&= \blacksquare d(v) + d(v)e(v, w) + \blacksquare d(v)e'(v, w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Voor $x \in V \setminus \{v, w\}$ tenslotte:

$$\begin{aligned}
& d(x) + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} d(y)e(x, y) + 1 \\
&= d(x) + d(v)e(x, v) + d(w)e(x, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w, x\}} d(y)e(x, y) + 1 \\
&= d'(x) + (d'(v) + \blacksquare d'(w))e(x, v) + \blacksquare d'(w)e(x, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w, x\}} d'(y)e'(x, y) + 1 \\
&= d'(x) + d'(v)e'(x, v) + d'(w)e'(x, w) + \sum_{y \in V \setminus \{v, w, x\}} d'(y)e'(x, y) + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Volledig analoog kunnen we ook de transformatie $v \xrightarrow{\text{red}} w$ definiëren, door gewoon $\blacksquare$ en $\blacksquare$ om te wisselen in de definitie van $v \xrightarrow{\text{blue}} w$:



Een interessant feit dat je gemakkelijk kan narekenen is dat $v \xrightarrow{\text{blue}} w$ en $v \xrightarrow{\text{red}} w$ elkaars invers zijn en ook dat deze transformaties orde 3 hebben (in de groepentheoretische betekenis). Tweemaal $v \xrightarrow{\text{blue}} w$ doen is dus hetzelfde als eenmaal $v \xrightarrow{\text{red}} w$ doen.

4 Vereenvoudigen van het graaf

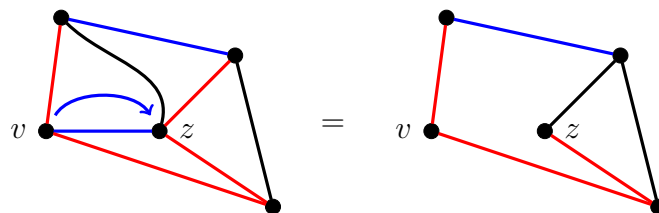
We tonen nu hoe de transformaties kunnen gebruikt worden om het graaf te vereenvoudigen tot we een vorm bekomen waarvoor we Probleem 2.1 “op zicht” kunnen oplossen. We doen dit op een zeer algoritmische manier, vergelijkbaar met de algoritmes om een stelsel op te lossen of om Rubiks kubus op te lossen.

Definitie 4.1. Een *geïsoleerde top* van een graaf is een top $v \in V$ zodat $e(v, w) = 0$ voor alle $w \in V$. Een *compleet graaf* (in onze veralgemeende betekenis) is een graaf waarvoor $e(v, w) = 1$ voor alle $v \neq w$.

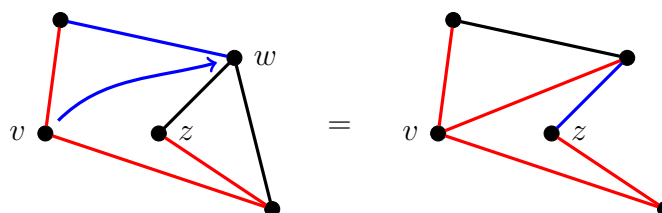
Als we een graaf hebben met een geïsoleerde top z en twee andere toppen v en w , dan zal het punt z geïsoleerd blijven na de transformatie $v \xrightarrow{\text{blue}} w$. In de oplossing van Probleem 2.1 is het duidelijk dat we $d(z) = 1$ moeten stellen voor een geïsoleerd punt en dat dit geen invloed heeft op de rest van het graaf. We mogen dus dat punt verwijderen en enkel met de overgebleven graaf werken. Zonder verlies van algemeenheid nemen we dus aan dat ons graaf geen geïsoleerde punten bevat. We mogen ook aannemen dat ons graaf geen compleet graaf is, want daarvoor is het probleem triviaal: het volstaat $d(v) = 1$ te nemen voor één van de punten en $d(v) = 0$ voor de andere.

Stel nu dat ons graaf G geen geïsoleerde punten heeft en dat het ook geen compleet graaf is. Er zijn dus twee toppen $z \neq v$ zodat $e(z, v) \neq 1$. We kiezen deze z en v vast voor de rest van de redenering. De bedoeling is dat we het graaf gaan vereenvoudigen via bovengenoemde transformaties zodat z een geïsoleerde top wordt die we dan kunnen weglaten.

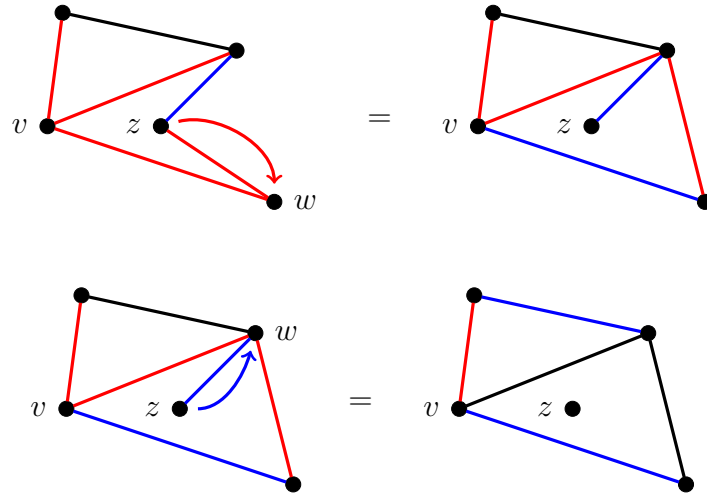
Step 1. Als $e(z, v) = \blacksquare$, dan doen we $v \xrightarrow{\text{blue}} z$; als daarentegen $e(z, v) = \blacksquare$, dan doen we $v \xrightarrow{\text{red}} z$; als $e(z, v) = 0$, dan doen we in deze stap niets. Na deze transformatie bekomen we $e(z, v) = 0$. We hebben bijvoorbeeld volgende figuur:



Step 2. Voor alle toppen w met $e(z, w) = 1$ doen we $v \xrightarrow{\text{blue}} w$. Na dit gedaan te hebben, zal $e(z, w) = \blacksquare$ voor deze toppen. We zien ook dat $e(z, v) = 0$ blijft. Op ons voorbeeld geeft dit:



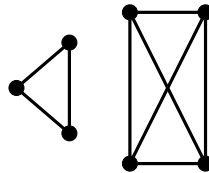
Stap 3. Voor alle toppen w met $e(z, w) = \blacksquare$ doen we $z \xrightarrow{\text{blue}} w$. Voor alle toppen w met $e(z, w) = \blacksquare$ doen we $z \xrightarrow{\text{red}} w$. Het gevolg is dat $e(z, w) = 0$ voor alle toppen $w \in V \setminus \{z\}$.



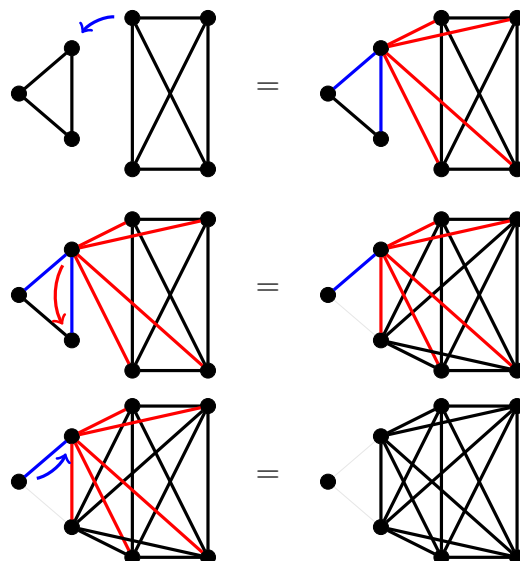
Na deze stappen is z een geïsoleerde top geworden. We kunnen nu z wegdenken en de 3 bovenstaande stappen opnieuw doen voor een graaf met een top minder.

5 Voorbeeld-oplossing

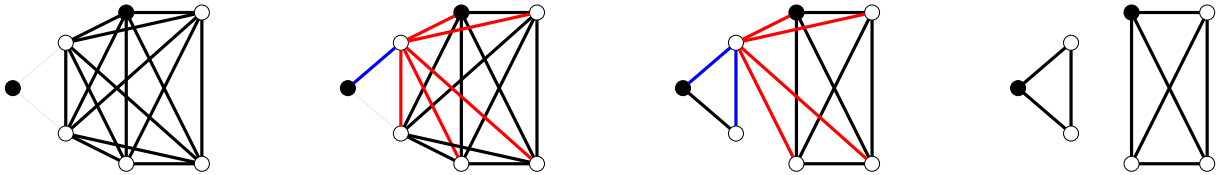
We werken nu een oplossing van Probleem 1.1 volledig uit. We vertrekken van het volgende graaf:



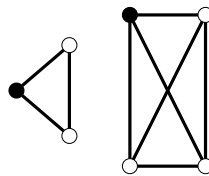
Nu doen we transformaties om het graaf te vereenvoudigen:



Dit laatste graaf is een disjuncte unie van een compleet graaf en geïsoleerde punten. We kunnen dus niet verder reduceren, maar we zien op zicht wat d moet zijn om Probleem 2.1 op te lossen. Nu gaan we terug door onze transformaties in omgekeerde volgorde en bereken we telkens d uit d' gebruik makend van de rekenregels die we gezien hebben. Dan hebben we voor elke tussenstap (elk graaf hierboven) een d die een oplossing geeft voor Probleem 2.1. We tekenen d op de figuur door de toppen een kleur te geven.



Tenslotte moeten we nog de transferfunctie toepassen om een oplossing over $\mathbb{F}_2$ te vinden. We krijgen dan uiteindelijk de volgende oplossing voor Probleem 1.1, waarbij de zwarte toppen staan voor de knopjes waar we op moeten drukken.



Merk op dat we de transferfunctie ook anders kunnen definiëren, door ■ en ■ om te wisselen. Dan krijgen we een andere oplossing:

