Wat is... Nielsen vastepunts-theorie?

Gert-Jan Dugardein

KU Leuven Kulak

15 Oktober, 2014

Outline

Inleiding
- Motivatie
- Geschiedenis

Enkele basisbegrippen
- Homotopie
- Overdekkingen

Nielsen Vastepuntstheorie
- Vastepuntsklassen
- Het Nielsengetal
- Enkele eigenschappen

Enkele concrete berekeningen

KU LEUVEN kulak

Wat zijn vaste punten?

Zij $f : X \to X$ een functie op een willekeurige ruimte.

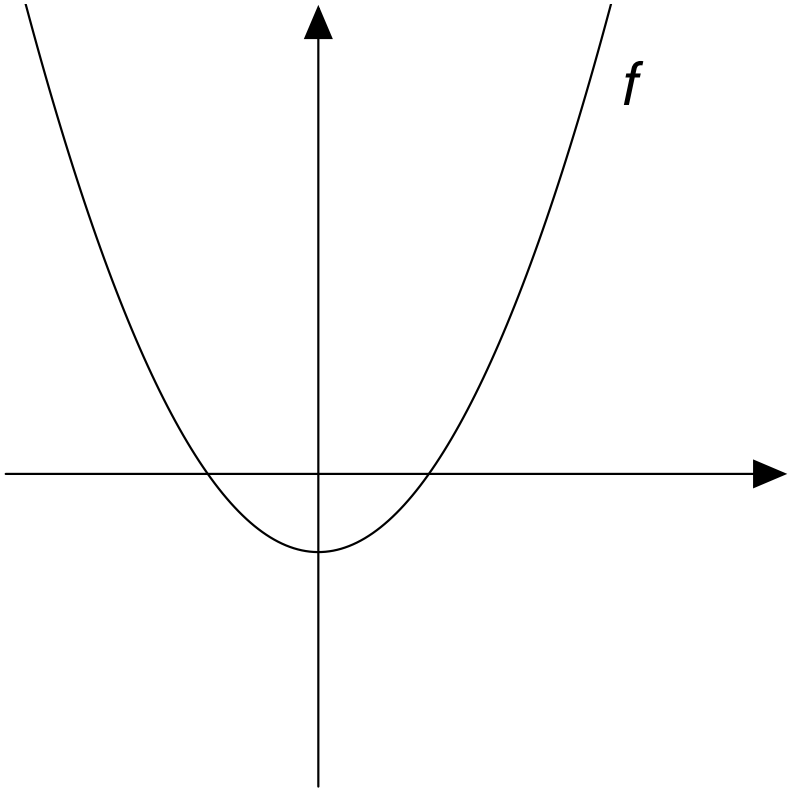
Definitie

*We noemen $x \in X$ een **vast punt** (of een fixpunt, of een dekpunt) als en slechts als*

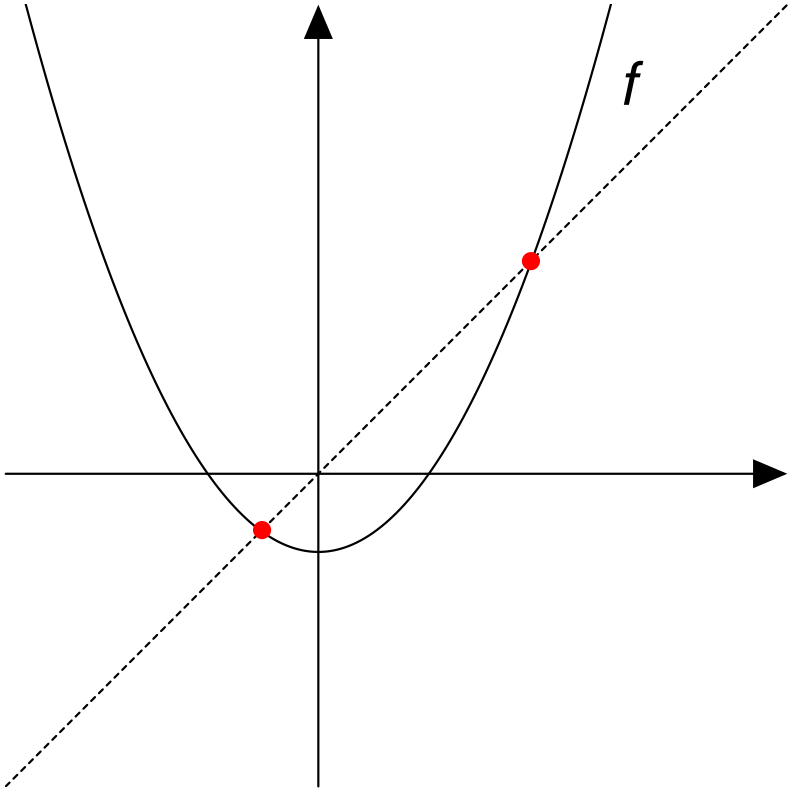
$$f(x) = x.$$

Wat zijn vaste punten?

Stel dat onze functie van de vorm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is.



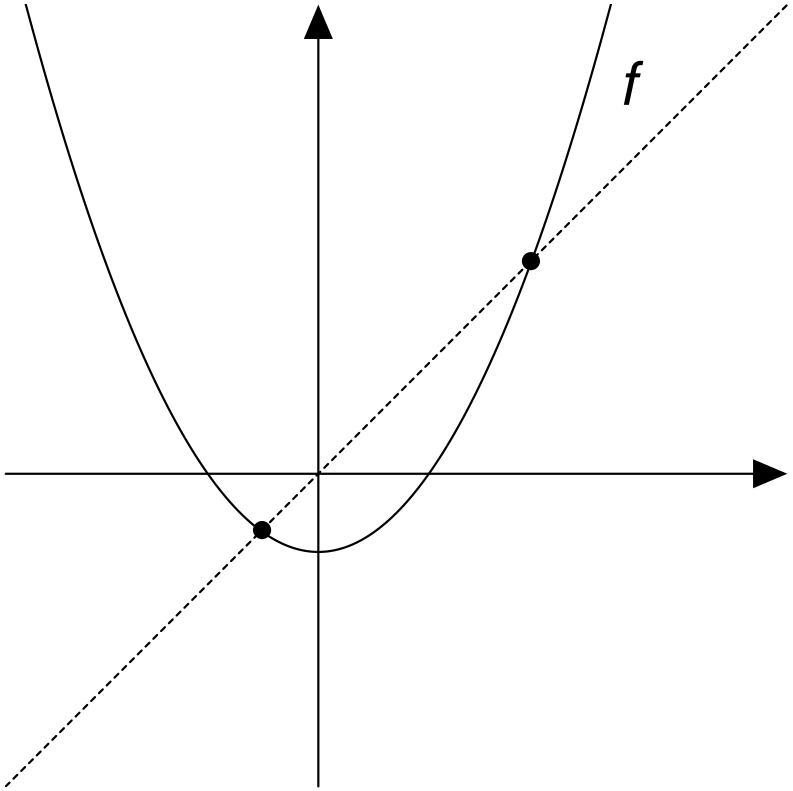
Wat zijn vaste punten?



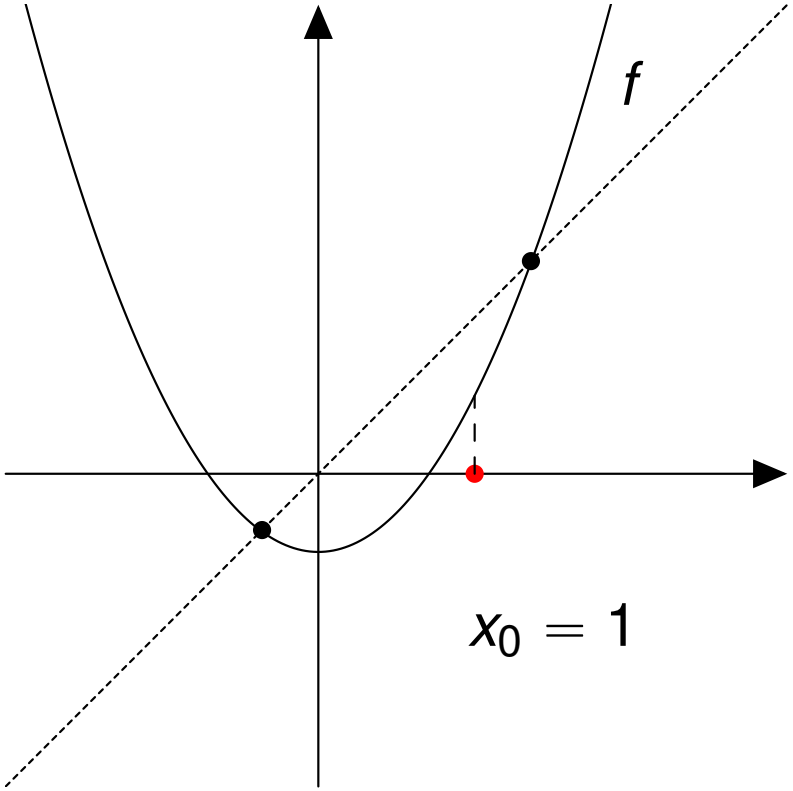
Wat is het nut van vaste punten?

- Evenwichtspunten voor een iteratief proces

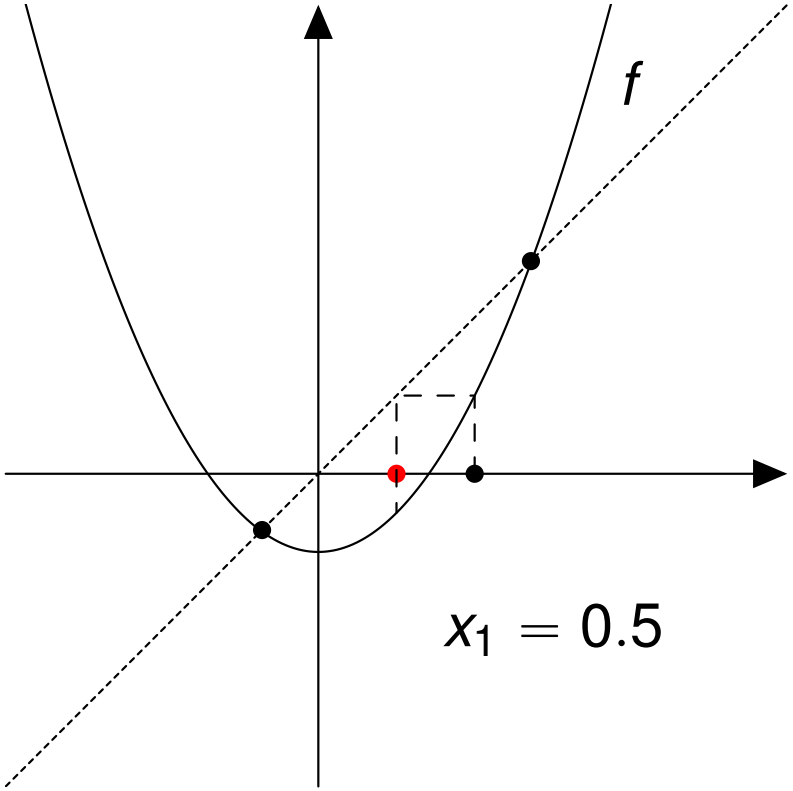
Wat is het nut van vaste punten?



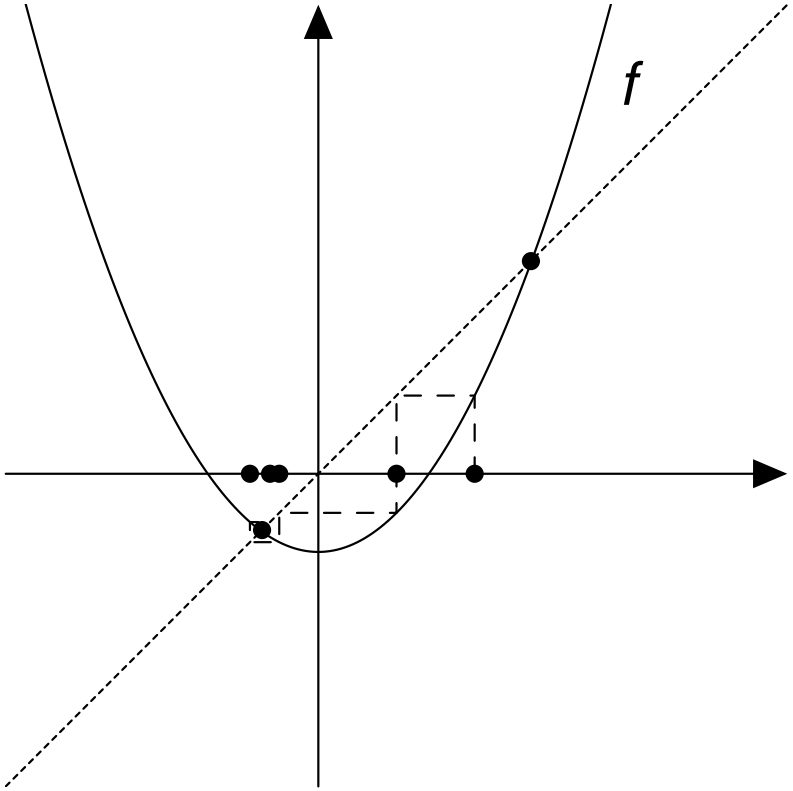
Wat is het nut van vaste punten?



Wat is het nut van vaste punten?



Wat is het nut van vaste punten?



Wat is het nut van vaste punten?

- Evenwichtspunten voor een iteratief proces.
- Nuttig voor diverse takken van de wetenschap.

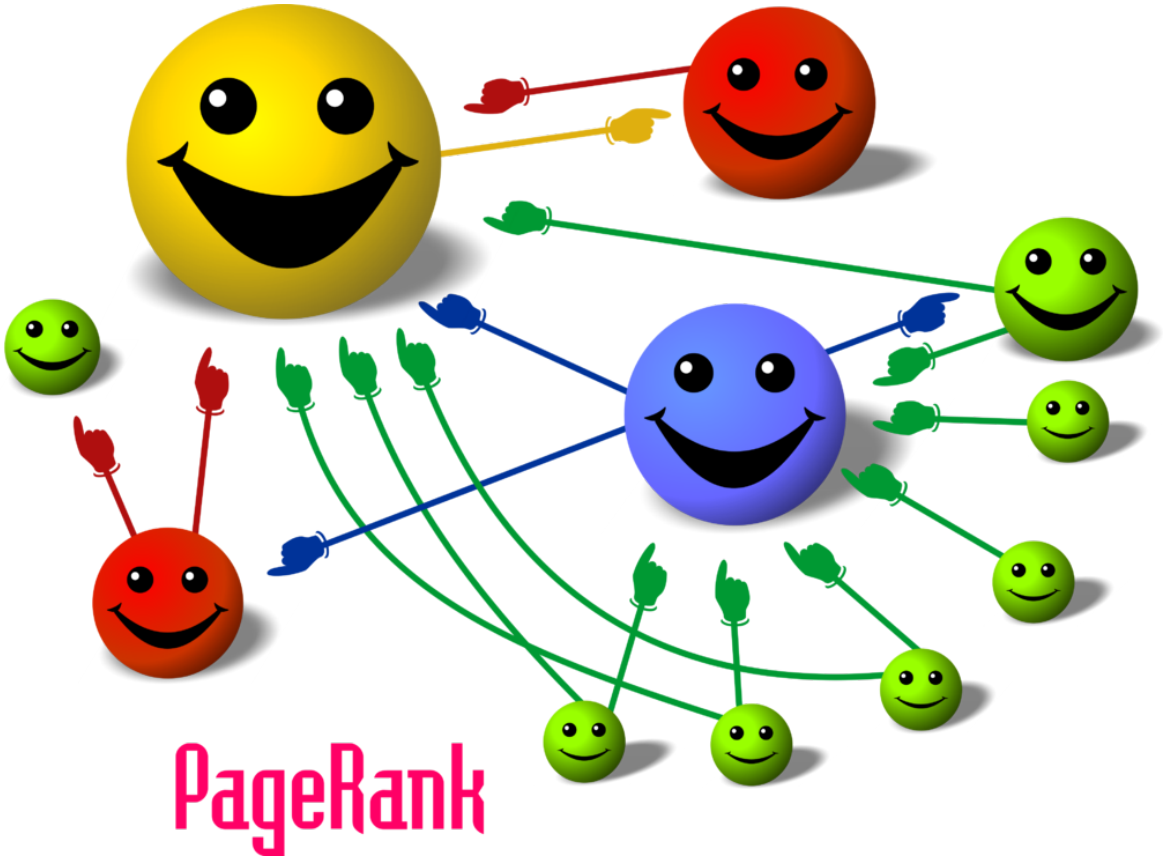
Wat is het nut van vaste punten?

Het zoeken van een Nash-evenwicht in de economie:

	A bekent	A zwijgt
B bekent	Beiden 5 jaar	B: vrij, A: 10 jaar
B zwijgt	A: vrij, B: 10 jaar	Beiden 2 jaar

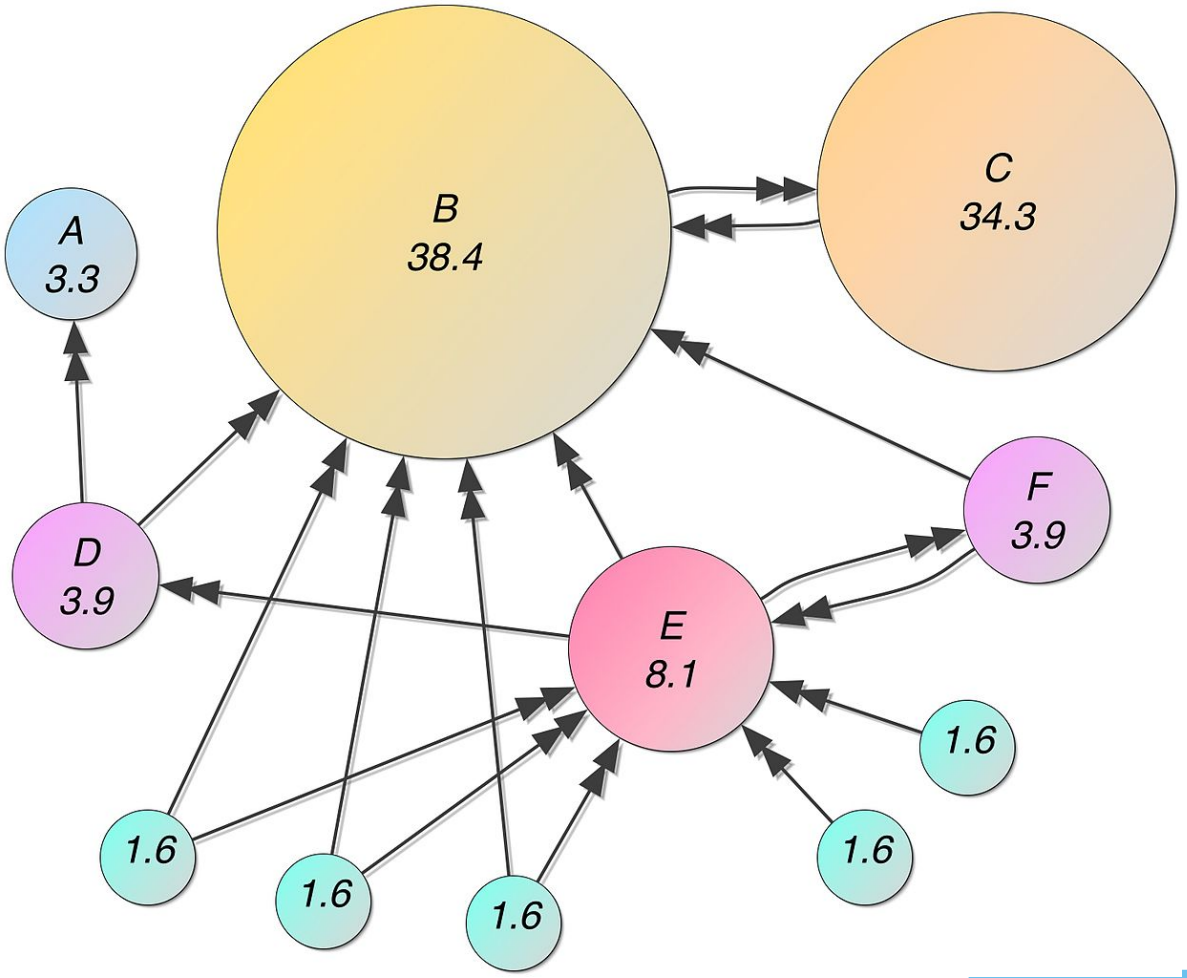
Wat is het nut van vaste punten?

PageRank van Google:



Wat is het nut van vaste punten?

PageRank van Google:



Wat is het nut van vaste punten?

- Evenwichtspunten voor een iteratief proces.
- Nuttig voor diverse takken van de wetenschap.
- Interessant!

Brouwers vastepuntsstelling

Brouwers vastepuntsstelling

Stelling (Brouwers vastepuntsstelling)

Elke continue afbeelding $f : D^n \to D^n$ heeft een vast punt.

Brouwers vastepuntsstelling

Stelling (Brouwers vastepuntsstelling)

Elke continue afbeelding $f : D^n \to D^n$ heeft een vast punt.

Stelling (Veralgemeende Brouwer vastepuntsstelling)

Elke continue afbeelding $f : K \to K$, waarbij K een compacte, convexe deelruimte van $\mathbb{E}^n$ is, heeft een vast punt.

Lefschetz' vastepuntstelling

Lefschetz' vastepuntstelling

Zij $f : X \to X$ een continue afbeelding op een compact veelvlak.

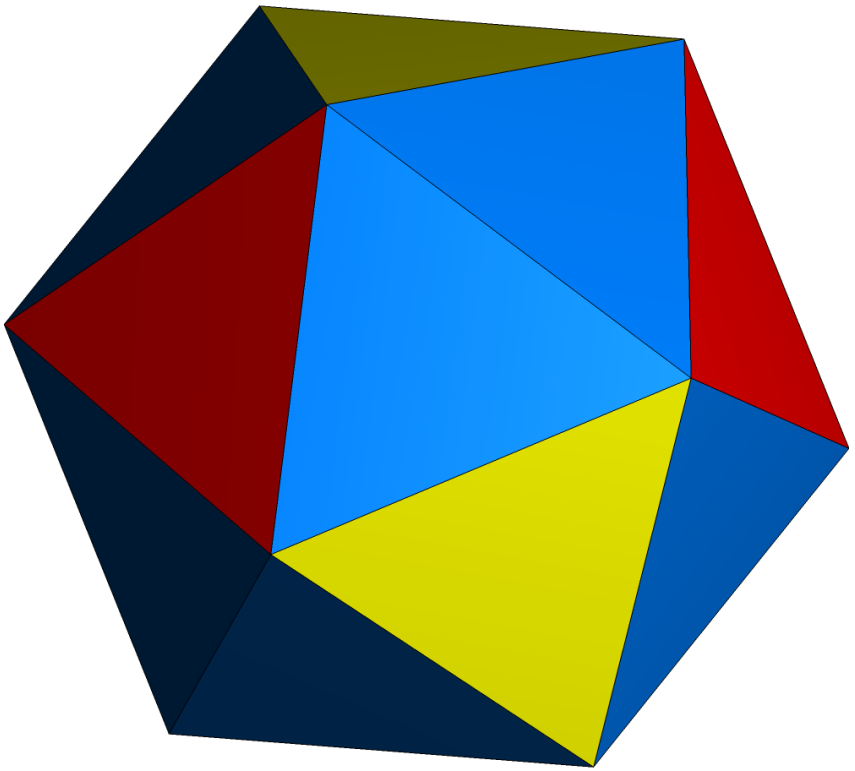
Definitie

Het Lefschetzgetal $L(f)$ is gedefinieerd als:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})\right).$$

Lefschetz' vastepuntstelling

S^2 is een compact veelvlak.



Lefschetz' vastepuntstelling

Zij $f : X \to X$ een continue afbeelding op een compact veelvlak.

Definitie

Het Lefschetzgetal $L(f)$ is gedefinieerd als:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})\right).$$

Stelling (Lefschetz' vastepuntstelling, 1926)

Als $L(f) \neq 0$, dan heeft f een vast punt.

Enkele opmerkingen

Definitie

Het Lefschetzgetal $L(f)$ is gedefinieerd als:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})\right).$$

- Veralgemening van Brouwers vastepuntstelling.
- Het omgekeerde geldt niet.
- $L(\mathrm{Id}_X) = \chi(X)$.
- Homotopie-invariant!

Enkele opmerkingen

Stelling (Lefschetz' vastepuntstelling)

Als $L(f) \neq 0$, dan heeft f een vast punt.

- Veralgemening van Brouwers vastepuntstelling.
- Het omgekeerde geldt niet.
- $L(\mathrm{Id}_X) = \chi(X)$.
- Homotopie-invariant!

Enkele opmerkingen

Definitie

Het Lefschetzgetal $L(f)$ is gedefinieerd als:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})\right).$$

- Veralgemening van Brouwers vastepuntstelling.
- Het omgekeerde geldt niet.
- $L(\mathrm{Id}_X) = \chi(X)$.
- Homotopie-invariant!

Enkele opmerkingen

Definitie

Het Lefschetzgetal $L(f)$ is gedefinieerd als:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})\right).$$

- Veralgemening van Brouwers vastepuntstelling.
- Het omgekeerde geldt niet.
- $L(\mathrm{Id}_X) = \chi(X)$.
- Homotopie-invariant!

Outline

Inleiding
- Motivatie
- Geschiedenis

Enkele basisbegrippen
- Homotopie
- Overdekkingen

Nielsen Vastepuntstheorie
- Vastepuntsklassen
- Het Nielsengetal
- Enkele eigenschappen

Enkele concrete berekeningen

KU LEUVEN kulak

Wat is een homotopie?

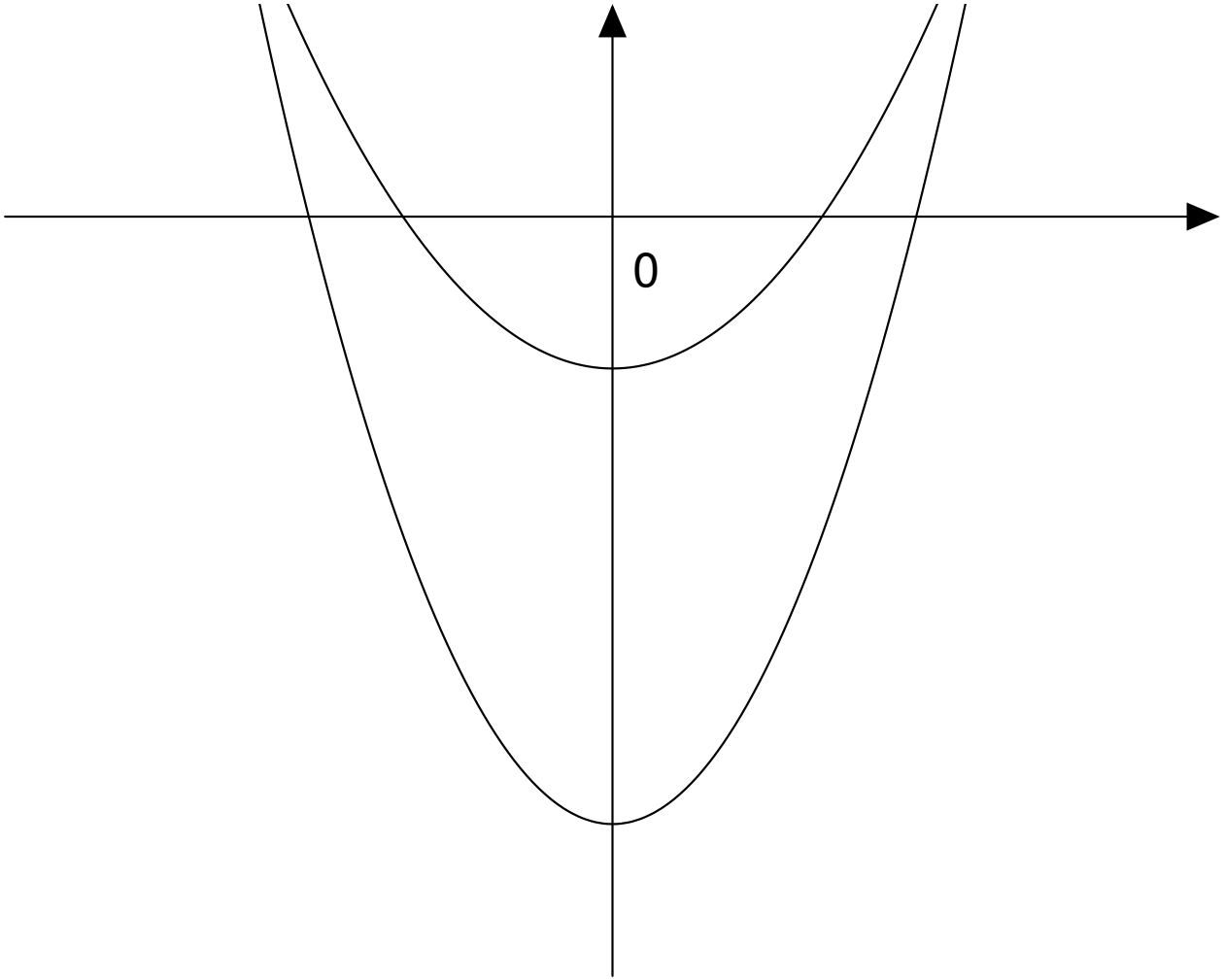
Definitie

Stel dat $f, g : X \to X$ continue afbeeldingen zijn. We zeggen dat f en g ***homotoop*** *zijn als er een continue afbeelding $F : I \times X \to X$ bestaat, zodat*

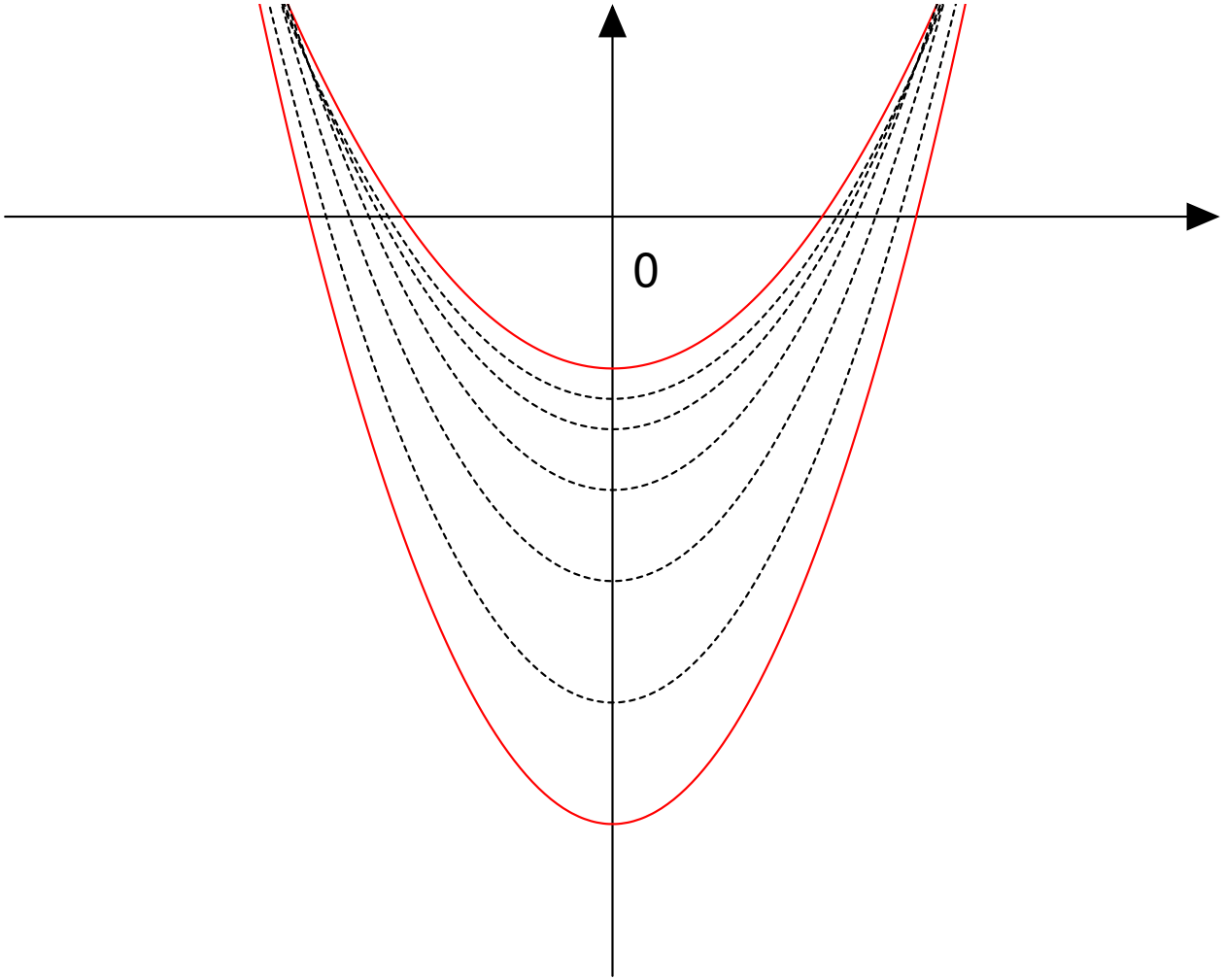
$$F(0, x) = f(x) \text{ en } F(1, x) = g(x).$$

De afbeelding F noemen we een ***homotopie****.*

Wat is een homotopie?



Wat is een homotopie?

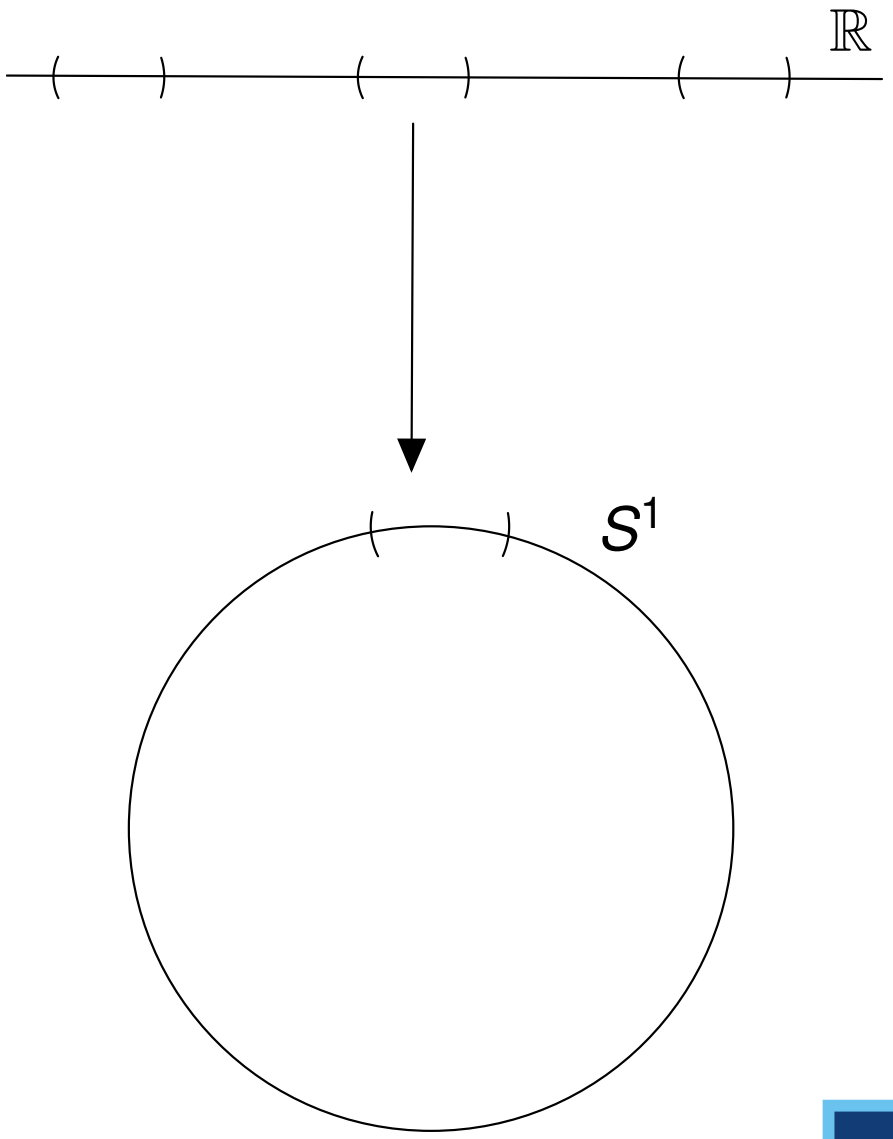


Wat is een overdekking?

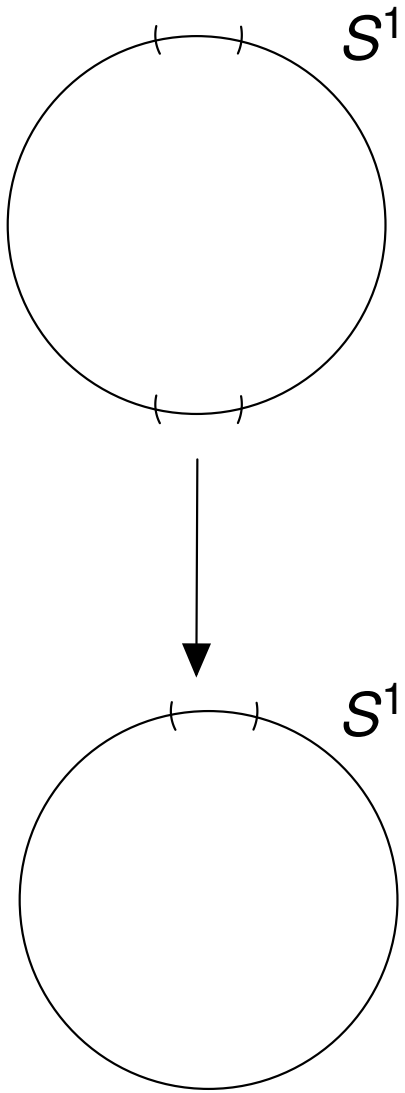
Definitie

*We zeggen dat $(\tilde{X}, p)$ een **overdekking** is van een ruimte X, als $p : \tilde{X} \to X$ een surjectief lokaal homeomorfisme is.*

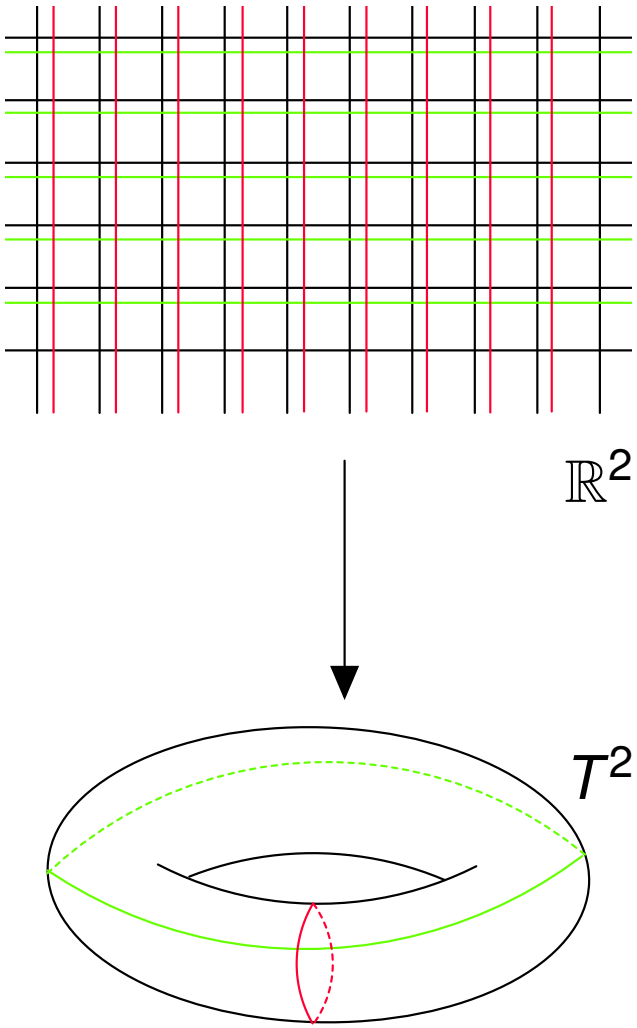
Wat is een overdekking?



Wat is een overdekking?

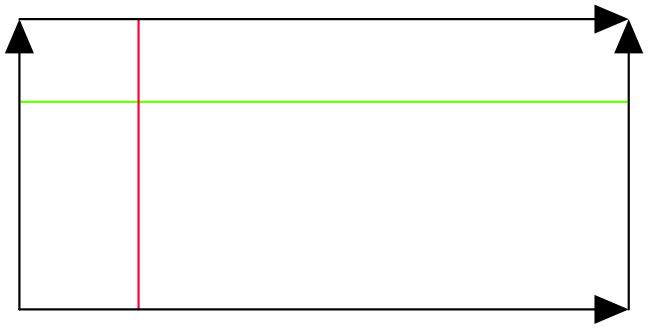


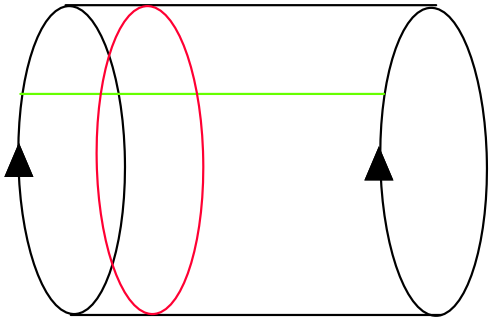
Wat is een overdekking?

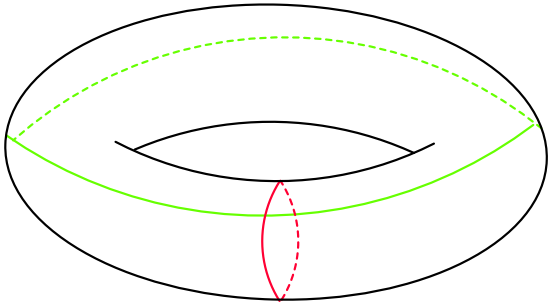


Wat is een overdekking?

Waarom is dit een overdekking van de torus?







Wat is een overdekking?

Definitie

*Als $\tilde{X}$ enkelvoudig samenhangend is, dan noemen we $(\tilde{X}, p)$ een **universele overdekking**.*

Wat is een overdekking?

Definitie

*Als $\tilde{X}$ enkelvoudig samenhangend is, dan noemen we $(\tilde{X}, p)$ een **universele overdekking**.*

Vanaf nu $\Longrightarrow$ elke overdekking is een universele overdekking!

Wat zijn liften?

Definitie

*We zeggen dat de continue afbeelding $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ een **lift** is van $f : X \to X$, als het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} .$$

*Liften van Id_X naar $\tilde{X}$ zullen we **overdekkingstransformaties** noemen. De groep van overdekkingstransformaties zullen we aanduiden met $\mathcal{D}$.*

Wat zijn liften?

Lemma

Kies een willekeurige lift $\tilde{f}$ van f. Elke lift van f is dan van de vorm $\alpha \circ \tilde{f}$, met $\alpha \in \mathcal{D}$.

Wat zijn liften?

Lemma

Kies een willekeurige lift $\tilde{f}$ van f. Elke lift van f is dan van de vorm $\alpha \circ \tilde{f}$, met $\alpha \in \mathcal{D}$.

Lemma

$\tilde{f}$ induceert een groepsmorfisme f_* op $\mathcal{D}$, zodat de volgende gelijkheid geldt voor elke $\alpha \in \mathcal{D}$:

$$f_*(\alpha) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \alpha.$$

Voorbeeld van een lift: de cirkel

De overdekkingsafbeelding is

$$p : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Bemerk dat $\alpha \in \mathcal{D}$ als en slechts als $\exists z \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t + z.$$

Dit laat ons toe om $\mathcal{D}$ met $\mathbb{Z}$ te identificeren.

Voorbeeld van een lift: de cirkel

De overdekkingsafbeelding is

$$p : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Bemerk dat $\alpha \in \mathcal{D}$ als en slechts als $\exists z \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t + z.$$

Dit laat ons toe om $\mathcal{D}$ met $\mathbb{Z}$ te identificeren.

Voorbeeld van een lift: de cirkel

Beschouw de afbeelding ($t \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi i t} \mapsto e^{14\pi i t}.$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 7t + z.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto 7z.$$

Voorbeeld van een lift: de cirkel

Beschouw de afbeelding ($t \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi i t} \mapsto e^{14\pi i t}.$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 7t + z.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto 7z.$$

Voorbeeld van een lift: de cirkel

Beschouw de afbeelding ($t \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi i t} \mapsto e^{14\pi i t}.$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 7t + z.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto 7z.$$

Voorbeeld van een lift: de cirkel

Beschouw de afbeelding ($t \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi i t} \mapsto e^{14\pi i t}.$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 7t + z.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto 7z.$$

Voorbeeld van een lift: de torus

De overdekkingsafbeelding is

$$p : \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1 : (t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}).$$

Bemerk dat $\alpha \in \mathcal{D}$ als en slechts als $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t_1, t_2) \mapsto (t_1 + z_1, t_2 + z_2).$$

Dit laat ons toe om $\mathcal{D}$ met $\mathbb{Z}^2$ te identificeren.

Voorbeeld van een lift: de torus

De overdekkingsafbeelding is

$$p : \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1 : (t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}).$$

Bemerk dat $\alpha \in \mathcal{D}$ als en slechts als $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t_1, t_2) \mapsto (t_1 + z_1, t_2 + z_2).$$

Dit laat ons toe om $\mathcal{D}$ met $\mathbb{Z}^2$ te identificeren.

Voorbeeld van een lift: de torus

Beschouw de afbeelding ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 : (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) \mapsto (e^{2\pi i (t_1+t_2)}, e^{2\pi i (t_1+2t_2)}).$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld van een lift: de torus

Beschouw de afbeelding ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 : (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) \mapsto (e^{2\pi i (t_1+t_2)}, e^{2\pi i (t_1+2t_2)}).$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld van een lift: de torus

Beschouw de afbeelding ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 : (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) \mapsto (e^{2\pi i (t_1+t_2)}, e^{2\pi i (t_1+2t_2)}).$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld van een lift: de torus

Beschouw de afbeelding ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$):

$$f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 : (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) \mapsto (e^{2\pi i (t_1+t_2)}, e^{2\pi i (t_1+2t_2)}).$$

Een mogelijke keuze qua lift is

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

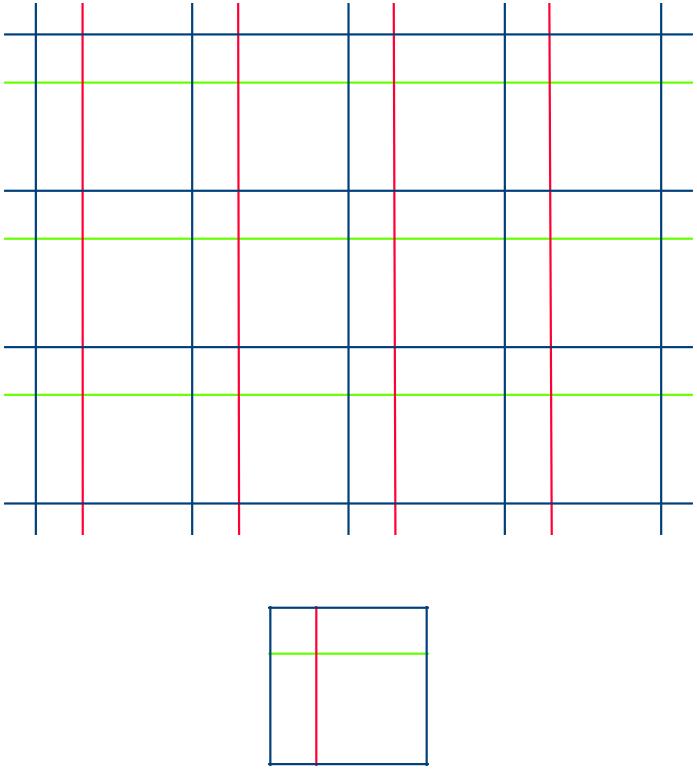
Elke mogelijke lift van f is van de vorm

$$\tilde{f}' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

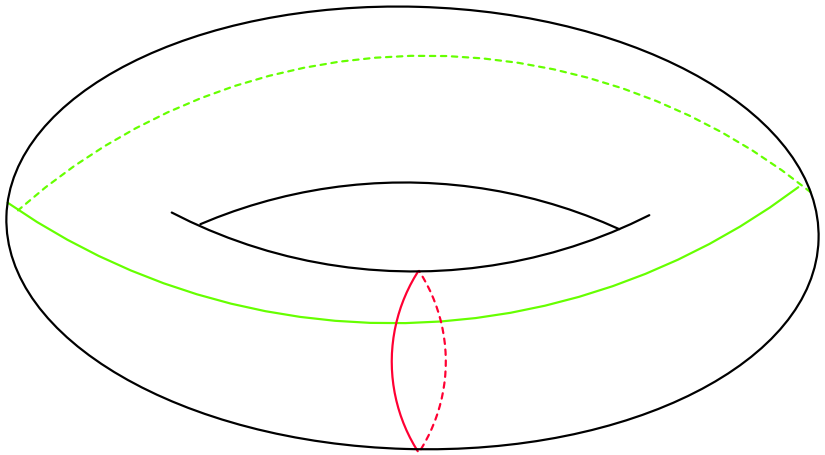
Het is duidelijk dat

$$f_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

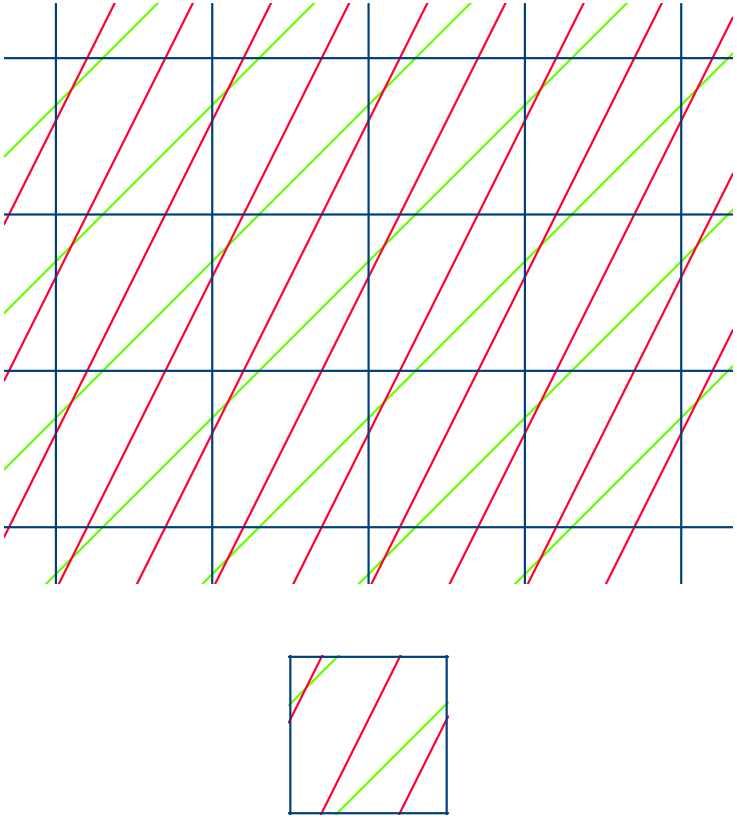
Voorbeeld van een lift: de torus



Voorbeeld van een lift: de torus



Voorbeeld van een lift: de torus



Outline

Inleiding
- Motivatie
- Geschiedenis

Enkele basisbegrippen
- Homotopie
- Overdekkingen

Nielsen Vastepuntstheorie
- Vastepuntsklassen
- Het Nielsengetal
- Enkele eigenschappen

Enkele concrete berekeningen

KU LEUVEN kulak

Wat is een vastepuntsklasse?

Doel: proberen te bepalen hoeveel vaste punten er zijn.

Wat is een vastepuntsklasse?

Notatie

De vastepuntsverzameling van g zullen we noteren als $\mathrm{Fix}(g)$.

Definitie

Kies een referentielift $\tilde{f}$ van een continue afbeelding. Een vastepuntsklasse is een verzameling van de vorm $p(\mathrm{Fix}(\alpha \circ \tilde{f}))$, met $\alpha \in \mathcal{D}$.

Voorbeeld van een vastepuntsklasse

Stel opnieuw:

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi it} \mapsto e^{14\pi it}.$$

Beschouw de lift:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t + 1.$$

Dan is

$$\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1) = \left\{ \frac{-1}{6} \right\} \text{ en } p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)) = \{ e^{\frac{-2\pi i}{6}} \}.$$

Voorbeeld van een vastepuntsklasse

Stel opnieuw:

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi it} \mapsto e^{14\pi it}.$$

Beschouw de lift:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t + 1.$$

Dan is

$$\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1) = \left\{ \frac{-1}{6} \right\} \text{ en } p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)) = \{ e^{\frac{-2\pi i}{6}} \}.$$

Voorbeeld van een vastepuntsklasse

Stel opnieuw:

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi it} \mapsto e^{14\pi it}.$$

Beschouw de lift:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t + 1.$$

Dan is

$$\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1) = \left\{ \frac{-1}{6} \right\} \text{ en } p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)) = \{e^{\frac{-2\pi i}{6}}\}.$$

Voorbeeld van een vastepuntsklasse

Stel opnieuw:

$$f : S^1 \to S^1 : e^{2\pi it} \mapsto e^{14\pi it}.$$

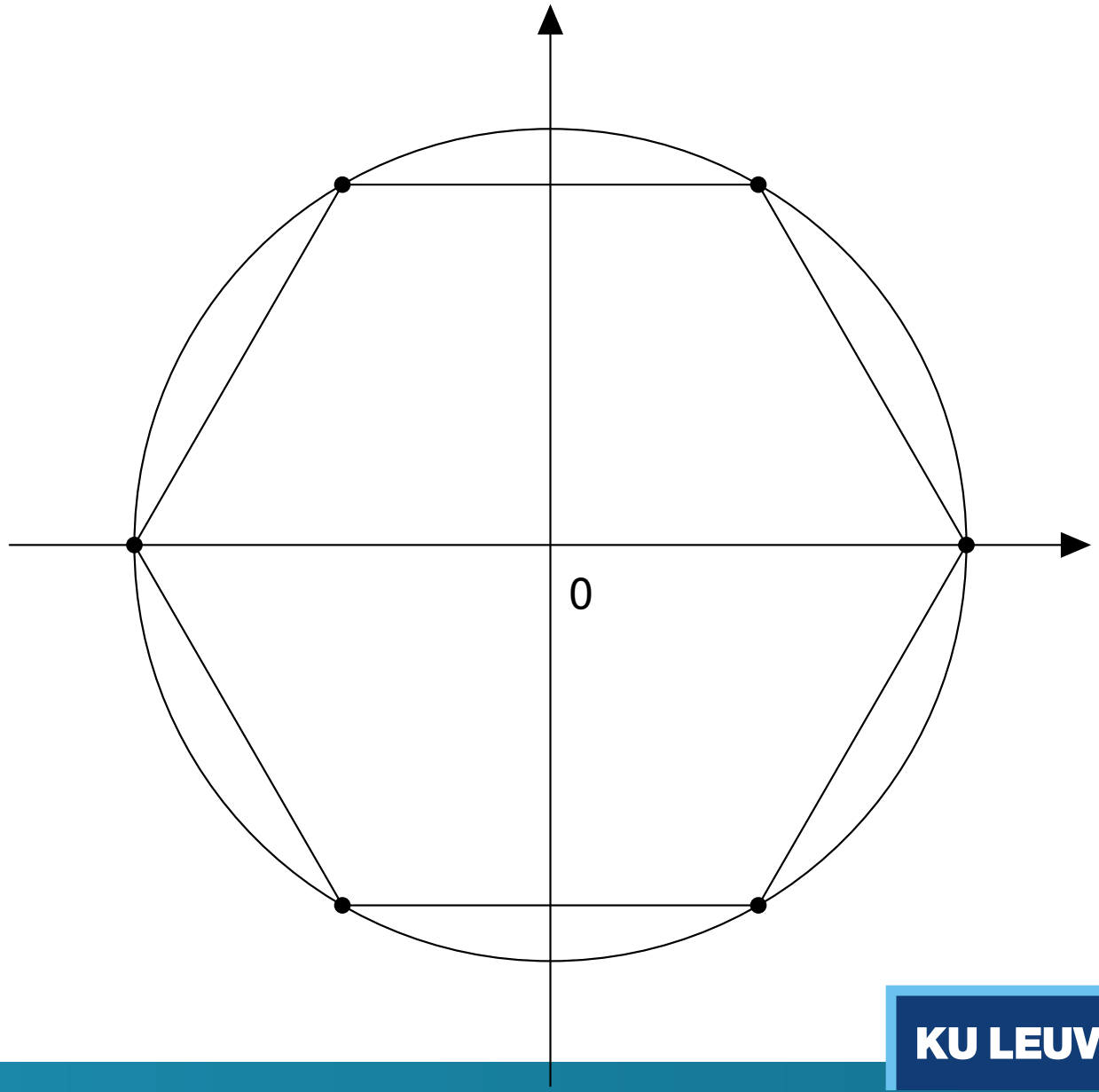
Beschouw de lift:

$$\tilde{f}_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 7t + z.$$

Dan is

$$\mathrm{Fix}(\tilde{f}_z) = \left\{ \frac{-z}{6} \right\} \text{ en } p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)) = \{e^{\frac{-2\pi iz}{6}}\}.$$

Voorbeeld van een vastepuntsklasse



Enkele eigenschappen van vastepuntsklassen

Propositie

We hebben twee mogelijkheden:

- $\exists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \Rightarrow p(\mathrm{Fix}(\alpha \circ \tilde{f})) = p(\mathrm{Fix}(\beta \circ \tilde{f}))$.
- $\nexists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \Rightarrow p(\mathrm{Fix}(\alpha \circ \tilde{f})) \cap p(\mathrm{Fix}(\beta \circ \tilde{f})) = \varnothing$.

Propositie

$$\mathrm{Fix}(f) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}} p(\mathrm{Fix}(\alpha \circ \tilde{f})).$$

$\Longrightarrow$ vastepuntsklassen vormen een partitie van de vastepuntsverzameling.

Wat is het Reidemeistergetal?

Definitie

*We zeggen dat α en β (beiden in $\mathcal{D}$) in dezelfde f_*-**Reidemeisterklasse** zitten als en slechts als er een $\gamma \in \mathcal{D}$ bestaat, zodat*

$$\alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}).$$

Dit is een equivalentierelatie.

Propositie

Er is een (natuurlijke) bijectie tussen f_*-Reidemeisterklassen en vastepuntsklassen van f.

Wat is het Reidemeistergetal?

Definitie

*Het **Reidemeistergetal** $R(f)$ is het aantal vastepuntsklassen.*

Wat is het Reidemeistergetal?

Definitie

*Het **Reidemeistergetal** $R(f)$ is het aantal vastepuntsklassen.*

Wat zegt $R(f)$ over het aantal vaste punten?

Wat is het Reidemeistergetal?

Definitie

*Het **Reidemeistergetal** $R(f)$ is het aantal vastepuntsklassen.*

Wat zegt $R(f)$ over het aantal vaste punten?

Niks, want vastepuntsklassen kunnen leeg zijn. Maar het is wel vrij makkelijk te berekenen.

Intermezzo: R_∞

Hot topic research question: welke groepen hebben de R_∞-eigenschap?

Definitie

We zeggen dat een groep G de R_∞-eigenschap heeft als en slechts als er voor elk automorfisme ϕ van G geldt dat er oneindig veel ϕ-Reidemeisterklassen bestaan.

Wat is het Nielsengetal?

Stelling

Het is mogelijk om aan elke vastepuntsklasse $\mathbb{F}$ van f een geheel getal $i(f, \mathbb{F})$ toe te kennen, zodat $\mathbb{F}$ niet kan verdwijnen onder een homotopie van zodra $i(f, \mathbb{F}) \neq 0$.

Definitie

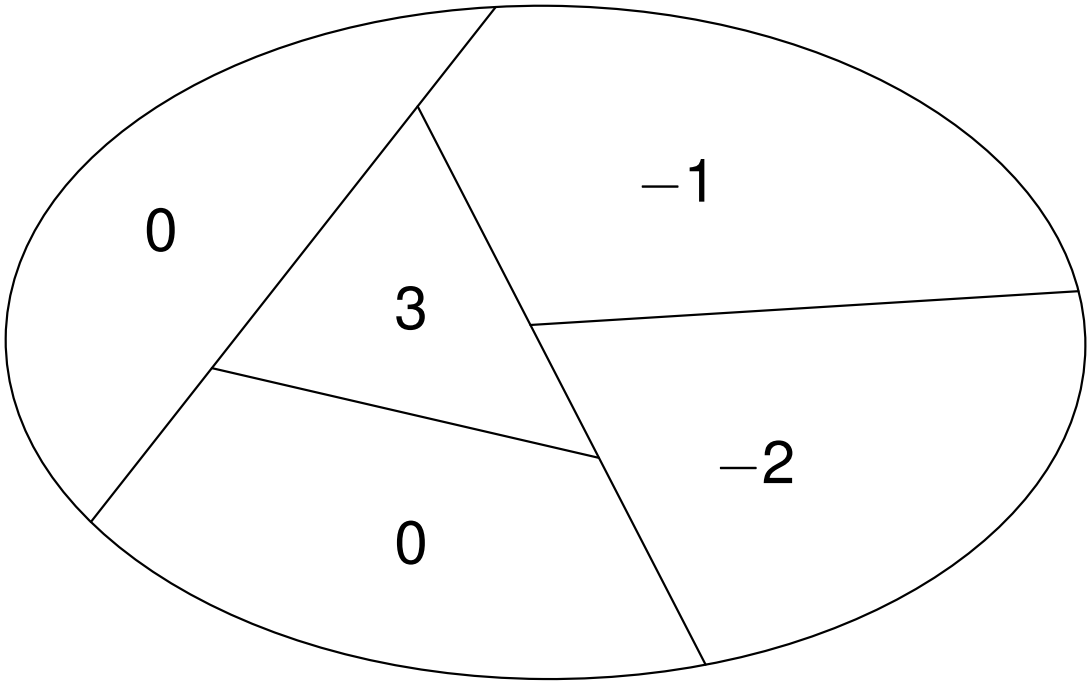
Een vastepuntsklasse $\mathbb{F}$ van f noemen we ***essentieel*** *als $i(f, \mathbb{F}) \neq 0$. Het* ***Nielsengetal*** *$N(f)$ is het aantal essentiële vastepuntsklassen.*

Wat is het Nielsengetal?

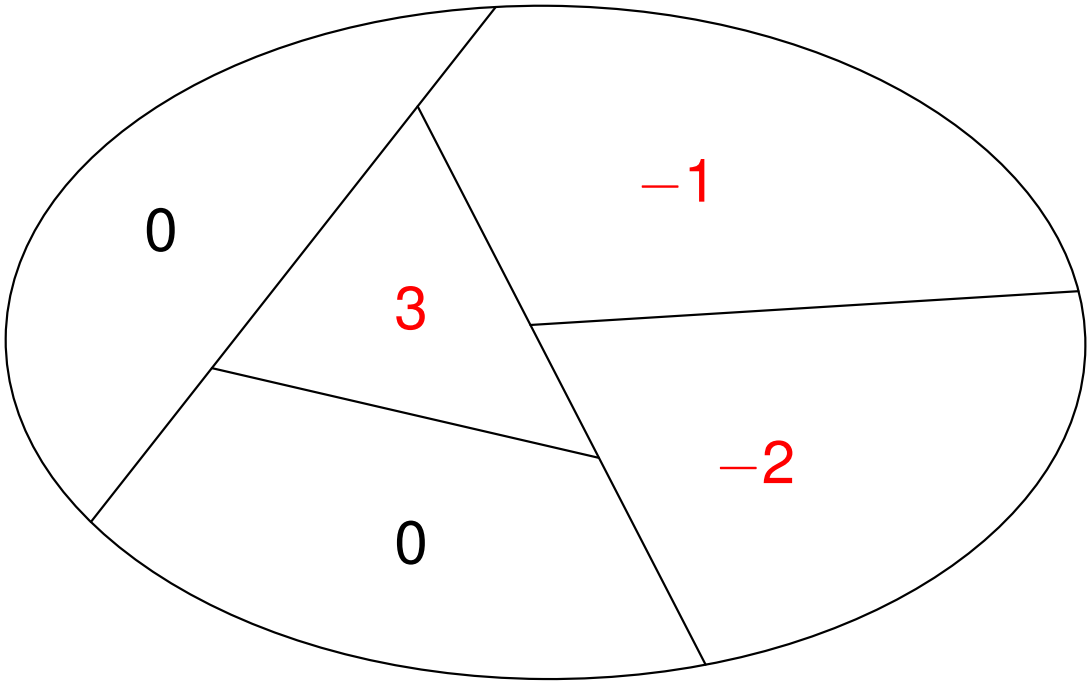
Stelling

Het Nielsengetal $N(f)$ is een homotopie-invariante ondergrens voor het aantal vaste punten van f.

Wat is het Nielsengetal?



Wat is het Nielsengetal?



Wecken-eigenschap

Definitie

We zeggen dat f de Wecken-eigenschap heeft, als er een afbeelding $g \simeq f$ bestaat, zodat $N(f) = N(g) = \#\,\mathrm{Fix}(g)$.

Stelling (Wecken, 1942)

Als f een continue afbeelding is op een variëteit van dim $\geqslant 3$, *dan heeft f de Wecken-eigenschap.*

Stelling (Jiang,1984)

Als f een continue afbeelding is op een variëteit X van dim 2, *dan heeft f de Wecken-eigenschap als en slechts als $\chi(X) \geqslant 0$.*

Wecken-eigenschap

Definitie

We zeggen dat f de Wecken-eigenschap heeft, als er een afbeelding $g \simeq f$ bestaat, zodat $N(f) = N(g) = \#\,\mathrm{Fix}(g)$.

Stelling (Wecken, 1942)

Als f een continue afbeelding is op een variëteit van dim $\geqslant 3$, *dan heeft f de Wecken-eigenschap.*

Stelling (Jiang,1984)

Als f een continue afbeelding is op een variëteit X van dim 2, *dan heeft f de Wecken-eigenschap als en slechts als $\chi(X) \geqslant 0$.*

Lefschetz-Hopf vastepuntstelling

Nauw verband tussen $L(f)$ en $N(f)$.

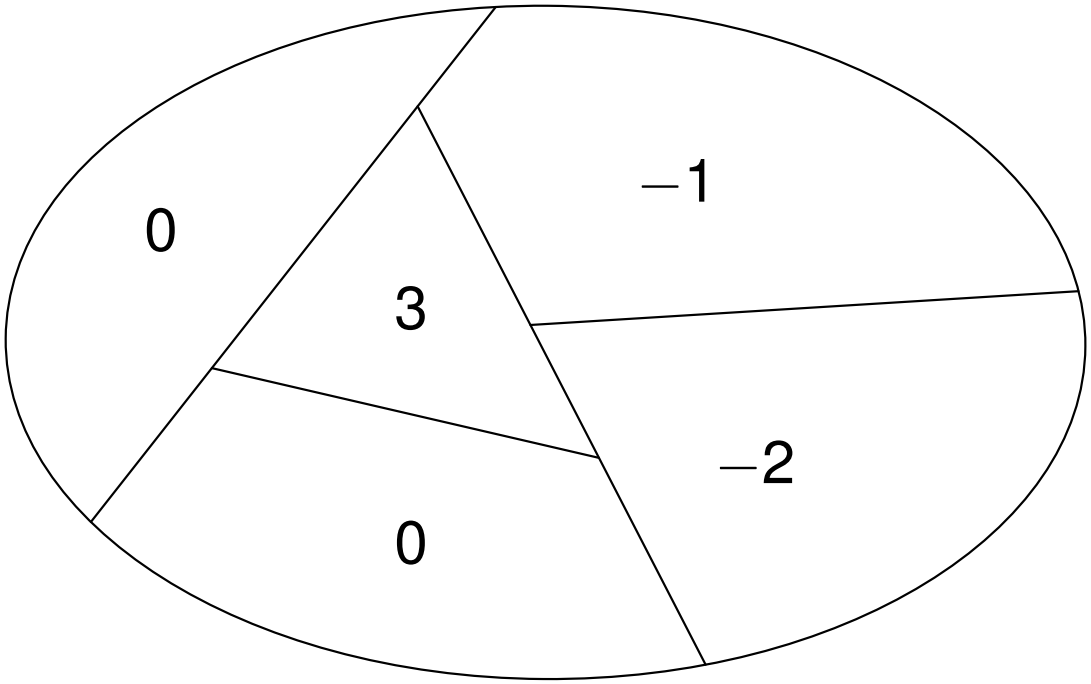
Stelling (Lefschetz-Hopf vastepuntstelling)

Als f een continue afbeelding is op een compact veelvlak, dan is

$$L(f) = \sum_{\mathbb{F}} i(f, \mathbb{F}).$$

$\Longrightarrow$ dit bewijst de Lefschetz vastepuntstelling.

Lefschetz-Hopf vastepuntstelling



Outline

Inleiding
- Motivatie
- Geschiedenis

Enkele basisbegrippen
- Homotopie
- Overdekkingen

Nielsen Vastepuntstheorie
- Vastepuntsklassen
- Het Nielsengetal
- Enkele eigenschappen

Enkele concrete berekeningen

KU LEUVEN kulak

De schijf

- Enkelvoudig samenhangend $\Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1$.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel en $N(f) = 1$.
- Schijf is samentrekbaar, dus elk koppel afbeeldingen is homotoop.
- Schijf is een Wecken-variëteit (denk aan rotatie).

De schijf

- Enkelvoudig samenhangend $\Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1$.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel en $N(f) = 1$.
- Schijf is samentrekbaar, dus elk koppel afbeeldingen is homotoop.
- Schijf is een Wecken-variëteit (denk aan rotatie).

De schijf

- Enkelvoudig samenhangend$\Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1$.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel en $N(f) = 1$.
- Schijf is samentrekbaar, dus elk koppel afbeeldingen is homotoop.
- Schijf is een Wecken-variëteit (denk aan rotatie).

De sfeer S^n

- Enkelvoudig samenhangend als $n \geqslant 2 \Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1 + (-1)^n d$, met d de graad van de afbeelding f.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel als en slechts als $d \neq (-1)^{n+1}$.
- Dit wil zeggen dat $N(f) = 1$ als en slechts als f niet homotoop is met de antipodale afbeelding.

De sfeer S^n

- Enkelvoudig samenhangend als $n \geqslant 2 \Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1 + (-1)^n d$, met d de graad van de afbeelding f.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel als en slechts als $d \neq (-1)^{n+1}$.
- Dit wil zeggen dat $N(f) = 1$ als en slechts als f niet homotoop is met de antipodale afbeelding.

De sfeer S^n

- Enkelvoudig samenhangend als $n \geqslant 2 \Longrightarrow$ slechts 1 vastepuntsklasse.
- $L(f) = 1 + (-1)^n d$, met d de graad van de afbeelding f.
- Lefschetz-Hopf vastepuntstelling $\Longrightarrow$ onze vastepuntsklasse is essentieel als en slechts als $d \neq (-1)^{n+1}$.
- Dit wil zeggen dat $N(f) = 1$ als en slechts als f niet homotoop is met de antipodale afbeelding.

De cirkel

Propositie

Alle vastepuntsklassen van afbeeldingen op de cirkel hebben dezelfde index.

Via Lefschetz-Hopf:

- $L(f) = 0 \Longrightarrow N(f) = 0$.
- $L(f) \neq 0 \Longrightarrow N(f) = R(f)$.

De cirkel

Propositie

Alle vastepuntsklassen van afbeeldingen op de cirkel hebben dezelfde index.

Via Lefschetz-Hopf:

- $L(f) = 0 \Longrightarrow N(f) = 0$.
- $L(f) \neq 0 \Longrightarrow N(f) = R(f)$.

Het berekenen van $R(f)$

Onder welke voorwaarden zitten $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ in dezelfde f_*-Reidemeisterklasse?

Opmerkingen:

- $\mathcal{D}$ is een abelse groep.
- $\exists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \iff \alpha = \beta + (\mathrm{Id} - f_*)(\gamma)$.
- $R(f) = \left| \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f_*)} \right|$.

Het berekenen van $R(f)$

Onder welke voorwaarden zitten $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ in dezelfde f_*-Reidemeisterklasse?

Opmerkingen:

- $\mathcal{D}$ is een abelse groep.
- $\exists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \iff \alpha = \beta + (\mathrm{Id} - f_*)(\gamma)$.
- $R(f) = \left| \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f_*)} \right|$.

Het berekenen van $R(f)$

Onder welke voorwaarden zitten $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ in dezelfde f_*-Reidemeisterklasse?

Opmerkingen:

- $\mathcal{D}$ is een abelse groep.
- $\exists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \iff \alpha = \beta + (\mathrm{Id} - f_*)(\gamma)$.
- $R(f) = \left| \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f_*)} \right|$.

Het berekenen van $R(f)$

Onder welke voorwaarden zitten $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ in dezelfde f_*-Reidemeisterklasse?

Opmerkingen:

- $\mathcal{D}$ is een abelse groep.
- $\exists \gamma \in \mathcal{D} : \alpha = \gamma\beta f_*(\gamma^{-1}) \iff \alpha = \beta + (\mathrm{Id} - f_*)(\gamma)$.
- $R(f) = \left| \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f_*)} \right|$.

De cirkel

Stelling

Stel dat d de graad van de afbeelding $f : S^1 \to S^1$ is, dan is

$$N(f) = |1 - d|.$$

Idee?

- d is het aantal keer dat de afbeelding zich rond S^1 wikkelt.
- We zoeken $R(f) = \left|\frac{\mathbb{Z}}{(1-d)\mathbb{Z}}\right|$.
- In ons voorbeeld: $d = 7 \Longrightarrow \left|\frac{\mathbb{Z}}{-6\mathbb{Z}}\right| = 6$.
- $N(f) = |L(f)|$.

De cirkel

Stelling

Stel dat d de graad van de afbeelding $f : S^1 \to S^1$ is, dan is

$$N(f) = |1 - d|.$$

Idee?

- d is het aantal keer dat de afbeelding zich rond S^1 wikkelt.
- We zoeken $R(f) = \left|\frac{\mathbb{Z}}{(1-d)\mathbb{Z}}\right|$.
- In ons voorbeeld: $d = 7 \implies \left|\frac{\mathbb{Z}}{-6\mathbb{Z}}\right| = 6$.
- $N(f) = |L(f)|$.

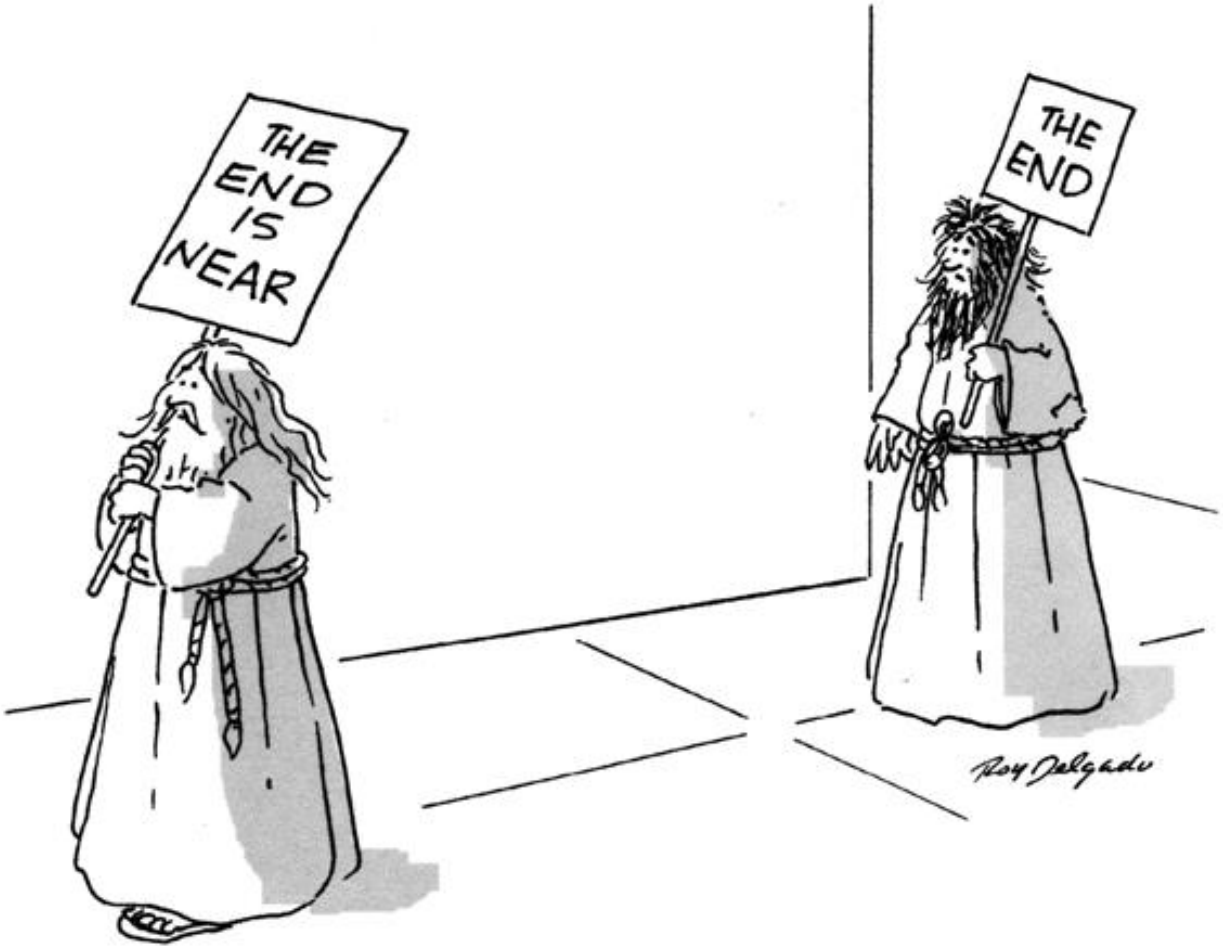
De cirkel

Stelling

Stel dat d de graad van de afbeelding $f : S^1 \to S^1$ is, dan is

$$N(f) = |1 - d|.$$

Idee?

- d is het aantal keer dat de afbeelding zich rond S^1 wikkelt.
- We zoeken $R(f) = \left|\frac{\mathbb{Z}}{(1-d)\mathbb{Z}}\right|$.
- In ons voorbeeld: $d = 7 \Longrightarrow \left|\frac{\mathbb{Z}}{-6\mathbb{Z}}\right| = 6$.
- $N(f) = |L(f)|$.

Vragen?