Magische Vierkanten

Bart Michels

PSA PRIME

Inhoud

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(G)$$

- $\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} = s \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \cdots + a_{nn} = s \end{cases}$
- $\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} + \cdots + a_{n1} = s \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{nn} = s \end{cases}$
- Bijkomende voorwaarden... (diagonalen)
- s: *magische constante*

Magische vierkanten
Eigenschappen

- Vectorruimte (oplossingen van een zeker lineair stelsel)
- Traditioneel: getallen van 1 t.e.m. n^2 (soms 0 t.e.m. $n^2 - 1$)
- Magische constante: $s = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$

Albrecht Dürer (1514): *Melencolica I*

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rijen, kolommen, diagonalen
- Hoeken
- Linkse twee - rechtse twee
- Middelste vier
- ...

Ramanujan:

$$\begin{pmatrix} 22 & 12 & 18 & 87 \\ 88 & 17 & 9 & 25 \\ 10 & 24 & 89 & 16 \\ 19 & 86 & 23 & 11 \end{pmatrix}$$

($^\circ$ 22/12/1887)

$$\begin{pmatrix} 22 & 9 & 16 & 86 \\ 86 & 16 & 9 & 22 \\ 9 & 22 & 86 & 16 \\ 16 & 86 & 22 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Latijnse vierkanten

Definitie

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Sudoku
- Toepassing: wedstrijd met n mensen, ieder koppel speelt 1 keer
- Transformeren:
  - rijen/kolommen verwisselen
  - roteren
  - transponeren

- 'Doorschuifsysteem':

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

- Cayley-tabel van willekeurige groep:

$$C_2^2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Idee: $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ zijn $n \times n$ Latijnse vierkanten met $a_{ij} = a_{kl} \implies b_{ij} \neq b_{kl}$
  Dan: $nA + B$ is magisch   Bestaan van zo'n matrices: zie straks
- Voorbeeld (Ramanujan):

$$\begin{pmatrix} 22 & 9 & 16 & 86 \\ 86 & 16 & 9 & 22 \\ 9 & 22 & 86 & 16 \\ 16 & 86 & 22 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 18 & 87 \\ 88 & 17 & 9 & 25 \\ 10 & 24 & 89 & 16 \\ 19 & 86 & 23 & 11 \end{pmatrix}$$

Vergelijk met:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 13 \\ 14 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 10 & 15 & 4 \\ 7 & 12 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Plaats ergens een 1.
- Plaats het volgende cijfer rechts boven het vorige.
- Wanneer op de bovenste rij en/of meest rechtse kolom, doe alsof de matrix een donut is.
- Indien een vakje al bezet is, ga naar onder i.p.v. rechtsboven.
- Probleem: diagonalen

$$\begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Schets van een bewijs: $\approx$ Methode met Latijnse vierkanten

- Zijdelengte n **oneven**
- In elke rij en elke kolom staat precies één getal uit elk interval $[nk+1, nk+n]$ voor alle $k \in [0, n-1]$.
- De getallen $\equiv 1 \pmod{n}$ verschijnen volgens het patroon '1 naar links, 2 naar onder'.
- Dus elke rij en elke kolom bevat precies één $\equiv 1 \pmod{n}$ **als n oneven is.**
- Elke rij en elke kolom bevat precies één $\equiv a \pmod{n}$ voor elke $a \in [1, n]$.

De Siamese methode

Link met Latijnse vierkanten

$$\begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

De Siamese methode

Link met Latijnse vierkanten

Bijzonder soort Latijns vierkant: (orde n)

- Kies r met $\mathrm{ggd}(r, n) = 1$, c willekeurig.
- Stel $a_{ij} = (i + rj + c) \bmod n$
- $\mathrm{ggd}(r, n) = 1 \implies$ Latijns vierkant

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$r = 1,\ c = 1$ $\qquad$ $r = 2,\ c = 3$

- r is als de richtingscoëfficiënt van de lijn waarop gelijke cijfers liggen (modulo n gezien).

Magisch vierkant maken van orde n, 'Latijnse' strategie:

- Maak A met rico r, B met rico s, $\text{ggd}(r, n) = \text{ggd}(s, n) = 1$.
- $a_{ij} = a_{kl} \implies b_{ij} \neq b_{kl}$ is voldaan a.s.a $\text{ggd}(r - s, n) = 1$.
- $nA + B$ is magisch

$\text{ggd}(1, 5) = \text{ggd}(2, 5) = \text{ggd}(2 - 1, 5) = 1$:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$r = 1,\ c = 1 \qquad\qquad s = 2,\ d = 3$$

Zo'n r, s bestaan enkel voor oneven n...

Diagonalen?

Voldoende voorwaarden op A en B:

- $\text{ggd}(r+1, n) = \text{ggd}(r-1, n) = 1$
  ($\iff$ elementen van resp. hoofd- en nevendiagonaal verschillen)
- Diagonaalelementen zijn allen $\frac{n+1}{2}$ (of $\frac{n-1}{2}$ indien men bij 0 begint).
  (indien vorige niet voldaan)

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$r = 1,\ c = 1 \qquad\qquad s = 2,\ d = 3$$

- Siamese methode: ok indien eerste cijfer bovenaan in het midden.
  Ook als $3 \mid n$ (ook voor andere s, eerste voorwaarde overbodig!)

Siamese methode en veralgemening falen voor even n.
Oplossingen?

- Cayley-tabellen van goed gekozen groepen
- Terugvallen op kleinere vierkanten: $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$, ... ?

- Idee: magische vierkanten van orde m en n combineren tot mn.
- Neem n^2 kopieën van M en maak ze tot een $(mn)^2$ vierkant.
- Om alle getallen verschillend te maken tellen we iets op bij elke M in die matrix: het overeenkomstige element in N maal m^2 $(J = (1 \cdots 1)^T \cdot (1 \cdots 1) \in \mathbb{R}^{m \times m})$
- Symbolisch: $J \otimes M + m^2 N \otimes J$

$$\begin{pmatrix} M & M & \cdots & M & M \\ M & M & \cdots & M & M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M & M & \cdots & M & M \\ M & M & \cdots & M & M \end{pmatrix} + m^2 \begin{pmatrix} n_{11}J & n_{12}J & \cdots & n_{1n}J \\ n_{21}J & n_{22}J & \cdots & n_{2n}J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n-1,1}J & n_{n-1,2}J & \cdots & n_{n-1,n}J \\ n_{n1}J & n_{n2}J & \cdots & n_{nn}J \end{pmatrix}$$

John Conway: de LUX-methode, voor $n = 4k + 2$

- Maak een $(2k+1) \times (2k+1)$ matrix met $k+1$ rijen L, 1 rij U's en $k-1$ rijen X'en. Wissel de middelste U om met de L erboven.
- Voor $i = 0, \ldots, (2k+1)^2$, doe:
  - Begin bij de middelste L bovenaan en ga per verhoging van i siameesgewijs naar de volgende letter.
  - Vervang L door $\begin{pmatrix} i+3 & i \\ i+1 & i+2 \end{pmatrix}$, U door $\begin{pmatrix} i & i+3 \\ i+1 & i+2 \end{pmatrix}$ en X door $\begin{pmatrix} i & i+3 \\ i+2 & i+1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} L & L & L & L & L \\ L & L & L & L & L \\ L & L & L & L & L \\ L & L & U & L & L \\ U & U & L & U & U \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Verdere ontwikkelingen

Andere constructies:

- Strachey's methode ($n = 4k + 2$)
- Reflectiemethode ($n = 2k$)
- Medjig-methode ($n = 2k$), °2006

Meer restricties:

- Panmagisch vierkant: elke diagonaal (doorlopend als op een torus) sommeert tot de magische constante ($\sim$ veralgemeende Siamees-Latijnse strategie)
- Symmetrisch magisch vierkant (Latijnse methode, abelse groepen)
- Magisch vierkant van priemgetallen

Veralgemeningen:

- Magische hyperkubus
- Magische zeshoek (bijenkorf-patroon)
- Magische cirkel
- Geomagisch vierkant

$$\begin{pmatrix} 17 & 89 & 71 \\ 113 & 59 & 5 \\ 47 & 29 & 101 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 61 & 19 & 37 \\ 43 & 31 & 5 & 41 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 97 & 17 & 23 & 13 \end{pmatrix}$$

Green-Tao (2004): Er zijn willekeurig lange rekenkundige rijen van priemgetallen.

$\Longrightarrow$ Er zijn willekeurig grote magische vierkanten met uitsluitend priemgetallen.

$$\begin{pmatrix} 17 & 89 & 71 \\ 113 & 59 & 5 \\ 47 & 29 & 101 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 61 & 19 & 37 \\ 43 & 31 & 5 & 41 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 97 & 17 & 23 & 13 \end{pmatrix}$$

Green-Tao (2004): Er zijn willekeurig lange rekenkundige rijen van priemgetallen.

$\Longrightarrow$ Er zijn willekeurig grote magische vierkanten met uitsluitend priemgetallen.

$$\begin{pmatrix} 1480028159 & 1480028153 & 1480028201 \\ 1480028213 & 1480028171 & 1480028129 \\ 1480028141 & 1480028189 & 1480028183 \end{pmatrix}$$