Workshop *generating functions*

PRIME

26 oktober 2014

Genererende functies werden ingevoerd door Abraham de Moivre in 1730 om recursieproblemen op te lossen, maar hebben sindsdien in allerlei deelgebieden van de wiskunde hun nut bewezen. De functies zijn formele machtreeksen in één veranderlijke, waarvan de coëfficiënten een rij getallen coderen. Zulke machtreeksen kunnen tot interessante inzichten leiden omtrent de rij getallen in kwestie.

A generating function is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display.
Herbert Wilf, *Generatingfunctionology* (1994)

1 Inleiding

We beginnen met enkele definities.

Definitie 1. De *(gewone) genererende functie* $G(a_n, x)$ van een een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is de formele machtreeks:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

Definitie 2. De *exponentiële genererende functie* $EG(a_n, x)$ van een een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is de formele machtreeks:

$$EG(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \frac{x^n}{n!}$$

Het is van belang dat we deze machtreeksen enkel *formeel* beschouwen, zonder ons druk te hoeven maken voor welke x deze al dan niet convergeert. Het enige relevante is dat we formele bewerkingen kunnen uitvoeren, zoals optellen, vermenigvuldigen, afleiden en samenstellen, die ons nieuwe informatie kan geven over de gecodeerde rij a_n.

Wat kunnen we nu juist aanvangen met zo'n genererende functie?

- Om te bewijzen dat twee rijen gelijk zijn, volstaat het te bewijzen dat hun genererende functies gelijk zijn.
- Genererende functies kunnen leiden tot expliciete formules voor recursief gedefinieerde rijen en omgekeerd.
- Een rij gedefinieerd als "het aantal manieren waarop…" heeft vaak een niet zo moeilijk te vinden genererende functie, waaruit dan via de Taylorreeksontwikkeling de coëfficiënten expliciet berekend kunnen worden.
- Bepaalde transformaties op rijen, zoals bijvoorbeeld de overgang naar partieelsommen, vertalen in eenvoudige transformaties op hun genererende functies.
- Asymptotisch gedrag van een rij kan onderzocht worden via de genererende functie.
- Een gevierde olympiadetechniek is de zogenaamde "*snake oil method*". Het idee is om in een genererende functie van een rij gedefinieerd als een zekere som, de twee sommen om te wisselen om expliciete informatie te winnen.
- Ook indien impliciete functionele vergelijkingen niet expliciet kunnen worden opgelost, zijn er mogelijkheden om uit zo'n vergelijking de coëfficiënten te extraheren. De *inversieformule van Lagrange* is zo'n handige tool.
- …

2 Afleidingen

Een centrale formule is de genererende functie van de constante rij $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ Uit de somformule van een meetkundige reeks volgt een eenvoudige gesloten vorm.

- $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \qquad = \frac{1}{1-x}$$

Een substitutie $x \mapsto ax$ levert eenvoudig de genererende functie van een algemene meetkundige rij:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n \qquad = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + \dots \qquad = \frac{1}{1-ax}$$

Door de eerste formule af te leiden vinden we de genererende functie van de rij $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \qquad = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \qquad = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Merk op dat dit gewoon neerkomt op het kwadrateren van de eerste formule. Algemener kun je inzien dat het product van twee genererende functies het volgende oplevert:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) x^n$$

Deze operatie op twee rijen heet het Cauchyproduct of de discrete convolutie en wordt genoteerd met een asterisk, $*$. Zo is dus $(1)_n * (1)_n = (n+1)_n$. In het bijzonder komt het Cauchyproduct met $(1)_n$ overeen met de overgang op partieelsommen, of in genererende functies uitgedrukt, vermenigvuldiging met $1/(1-x)$.

De partieelsommen van de rij $(n+1)_n$ zijn precies de driehoeksgetallen $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ met algemene term $\binom{n+2}{2}$.

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n \qquad = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \dots \qquad = \frac{1}{(1-x)^3}$$

In het algemeen geldt voor willekeurige natuurlijke k:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n \qquad = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Indien een rij expliciet gegeven wordt door een veelterm in de index n als voorschrift, kan deze worden geschreven als een lineaire combinatie van termen van de vorm $\binom{n+k}{k}$. Toegepast op de kwadraten geldt er bijvoorbeeld dat $n^2 = 2\binom{n+2}{2} - 3\binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}$, zodat dezelfde lineaire combinatie opgaat voor de genererende functie:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n \qquad = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \qquad = \frac{x\,(x+1)}{(1-x)^3}$$

Verder veralgemenend geldt er dat de genererende functie een rationale functie (verhouding van twee veeltermen) is als en slechts als de rij aan een lineaire recursiebetrekking voldoet met constante coëfficiënten. De genererende functie kan dan helpen de recursiebetrekking op te lossen naar een expliciete formule.

Een formule die ook vaak van pas komt is de veralgemeende binomiaalreeks, met α een willekeurig complex getal:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad = 1 + \frac{\alpha}{1!}\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \dots \qquad = (1+x)^\alpha$$

3 Toepassingen

3.1 Fibonacci (expliciete formule)

De welbekende rij van Fibonacci wordt recursief gedefinieerd door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n > 1$. De genererende functie $G(F_n, x)$, die we hier zullen noteren als $f(x)$, voldoet dus aan:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n\, x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n \\ &= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n \\ &= x + x \cdot (f(x) - F_0) + x^2 \cdot f(x) \end{aligned}$$

Uit $f(x) = x + f(x) \cdot (x + x^2)$ volgt een gesloten uitdrukking voor $f(x)$.

$$G(F_n, x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

De factor $1 - x - x^2$ valt te ontbinden in twee lineaire factoren: $(1 - \phi x) \cdot (1 - \phi' x)$, waarin ϕ de gulden snede voorstelt ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) en ϕ' zijn geconjugeerde ($\frac{1-\sqrt{5}}{2}$). Toepassen van de somformule voor meetkundige reeksen leert dan:

$$G(F_n, x) = \frac{x}{(1 - \phi x) \cdot (1 - \phi' x)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 - \phi' x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n - \phi'^n) \cdot x^n$$

Coëfficiënten gelijkstellen leidt tot de klassieke formule van Binet, een expliciete vorm voor de Fibonaccigetallen!

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3.2 Fibonacci (identiteit)

Voor de Fibonaccigetallen geldt bovendien de volgende eigenschap:

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Een bewijs hiervoor gaat heel snel via genererende functies. Het linkerlid, beschouwd als rij met index n, bestaat uit partieelsommen van F_n, zodat we de genererende functie snel kunnen opstellen. Die van het rechterlid vinden we door de rij van Fibonacci wat “op te schuiven” en er de constante rij $(1)_n$ van af te trekken. Wat elementaire algebra geeft dan dat deze functies gelijk zijn, zodat ook de bijhorende rijen gelijk zijn en de identiteit bewezen is.

$$G(\text{linkerlid}, x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{1 - x - x^2} - x \right) - \frac{1}{1 - x} = G(\text{rechterlid}, x)$$

4 Opgaven

1. Ga na welke effecten de volgende bewerkingen op de genererende functie induceren op de rij a_n.
   - $G(a_n, x) \mapsto x \cdot G(a_n, x)$
   - $G(a_n, x) \mapsto G(a_n, c \cdot x)$
   - $G(a_n, x) \mapsto (1 - x) \cdot G(a_n, x)$
   - $G(a_n, x) \mapsto x \cdot G'(a_n, x)$
   - $G(a_n, x) \mapsto \int_0^x G(a_n, t)\, \mathrm{d}t$
2. Zoek de genererende functies (in gesloten vorm) voor de volgende rijen.
   - $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
   - $1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, \ldots, 1/n!, \ldots$
   - $0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots$
   - $0, 1, 0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/7, 0, 1/9, 0, \ldots,$
3. Ga na hoe enkele natuurlijke bewerkingen op rijen (zoals de optelling, de overgang naar partieelsommen, of de bewerkingen van de eerste opgave) effect hebben op hun exponentiële genererende functie en omgekeerd. Kun je bovendien nagaan wat het exponentiële analogon is van de discrete convolutie? Met andere woorden, wat is de rij gecodeerd door het product van twee exponentiële genererende functies in functie van de originele rijen?
4. De harmonische getallen H_n zijn de sommen van de inversen van de eerste n positieve natuurlijke getallen: $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$. Stel tevens $H_0 = 0$. Bereken hun genererende functie.
5. Zoek een expliciete formule voor de rij gedefinieerd door $d_0 = 0$, $d_1 = 1$ en $d_n = 5d_{n-1} - 6d_{n-2}$.
6. Bewijs dat voor harmonische getallen H_n geldt dat $\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1) \cdot H_{n+1} - n - 1$.
7. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} H_n/2^n$.
8. Bewijs de identiteit van Vandermonde: $\sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} \cdot \binom{\beta}{n-i} = \binom{\alpha+\beta}{n}$.
9. Bewijs dat de genererende functie van de centrale binomiaalgetallen $\binom{2n}{n}$ gegeven wordt door $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.
10. Los de recursierelatie $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$, met $a_0 = 1$, op naar een expliciete formule voor a_n.
11. Gebruik de recursierelatie voor de Fibonaccigetallen F_n om een recursieve vergelijking voor hun kwadraten F_n^2 op te stellen, en zoek de genererende functie van deze rij (F_n^2).
12. Op hoeveel manieren kun je een zak vullen met n stukken fruit (keuze uit vier soorten), zodanig dat voldaan is aan volgende voorwaarden: (1) het aantal appels moet even zijn, (2) het aantal bananen een veelvoud van vijf, (3) er mogen hoogstens vier sinaasappels zijn, en (4) er mag hoogstens één peer tussenzitten?
13. Bewijs dat de exponentiële en gewone genererende functies van eenzelfde rij als volgt met elkaar in verband staan, gegeven dat de integraal bestaat:
$$G(a_n, x) = \int_0^\infty EG(a_n, xt) \cdot e^{-t}\, \mathrm{d}t$$
14. Los deze recursieformule op: $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \ldots + ng_0$ met startwaarde $g_0 = 1$.

15. Noteer $f(n)$ voor het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ zonder twee opeenvolgende getallen. Zoek via een recursierelatie deze waarden $f(n)$. Noteer vervolgens $f(n, k)$ voor het aantal deelverzamelingen *met grootte* k die geen twee opeenvolgende getallen bevatten en zoek ook voor deze waarden een expliciete formule.

    Los daarna het analoge cyclische probleem op, door nu ook 1 en n als opeenvolgend te veronderstellen.

16. Vijf mensen staan op de hoekpunten van een vijfhoek en gooien frisbees naar elkaar. In het begin bezitten twee mensen op adjacente hoekpunten elk een frisbee, die na elke stap naar links of naar rechts wordt gegooid met gelijke kans. Dit proces gaat zo door tot één persoon beide frisbees tegelijk ontvangt. Noteer p_n voor de kans dat het spel na precies n stappen stopt.

    - Zoek een genererende functie voor p_n.
    - Zoek p_n.
    - Bereken het verwachte aantal stappen voordat het spel eindigt.

17. Bestaan er twee (niet per se identieke) dobbelstenen, elk met zes zijvlakken waarop minstens één stip staat, die samen dezelfde kansverdelingsfunctie hebben als twee klassieke dobbelstenen?

18. Noteer a_n voor het aantal manieren waarop je een $3 \times n$-bord kan betegelen met domino's. Leid een genererende functie en een expliciete formule af voor a_n.

19. Noteer $s(n)$ voor het aantal rijtjes $(x_1, \ldots, x_k)$ waarin elke term een natuurlijk getal is tussen 1 en n (inclusief) en minstens dubbel zo groot als de voorgaande term. De lengte k van zo'n rijtje wordt niet gespecifieerd; in het bijzonder voldoet de lege rij ook. Bewijs dat $s(n) = s(n-1) + s(\lfloor n/2 \rfloor)$ met $s(0) = 1$.

    Bewijs vervolgens dat de genererende functie $S(x)$ voldoet aan $(1-x) \cdot S(x) = (1+x) \cdot S(x^2)$ en concreet:

    $$S(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

    Noteer nu $\bar{s}(n)$ voor het aantal rijtjes waarin elke term een natuurlijk getal is tussen 1 en n (inclusief) en strikt groter dan de som van alle voorgaande termen. Kun je een verband vinden tussen $s(n)$ en $\bar{s}(n)$?

20. De Catalangetallen C_n, vernoemd naar de Belgische wiskundige Eugène Catalan, kunnen worden gedefinieerd als het aantal manieren waarop n paar haakjes een geldige groepering vormen. Bijvoorbeeld, met $n = 3$ is $(())()$ geldig, maar $())()($ niet. Een geldige groepering moet beginnen met een openend haakje en is dus van de vorm $(A)B$, waarbij ook A en B geldige vormen zijn (mogelijks ledig) met samen $n-1$ paar haakjes.

    Gebruik deze vorm om een (niet-lineaire) recursierelatie voor C_n op te stellen. Zoek vanuit deze recursierelatie vervolgens de genererende functie, en bepaal een gesloten formule voor C_n.

21. De Bellgetallen B_n tellen het aantal partities van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Een partitie is een verzameling niet-ledige, onderling disjuncte deelverzamelingen waarvan de unie de volledige initiële verzameling is. Bijvoorbeeld, $B_3 = 5$ want $\{1, 2, 3\}$ kan worden gepartitioneerd op vijf verschillende manieren:

    $$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \quad \{\{3\}, \{1, 2\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}\}$$

    Bewijs dat de Bellgetallen voldoen aan $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

    Gebruik deze relatie om aan te tonen dat $b'(x) = e^x \cdot b(x)$, met $b(x)$ de exponentiële genererende functie van de Bellgetallen. Los hieruit $b(x)$ expliciet op en zoek een gesloten formule voor B_n.

22. Een partitie van een natuurlijk getal is een manier om dat getal te schrijven als een som van positieve natuurlijke getallen. Noteer het aantal partities van n als $p(n)$. Bijvoorbeeld $p(5) = 7$ want $5 = 4+1 = 3+3 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$.

Er bestaat geen eenvoudige expliciete formule voor $p(n)$, maar gelukkig valt zijn genererende functie nog mee. Bewijs dat deze gelijk is aan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Bewijs vervolgens dat het aantal partities van n in getallen die géén veelvoud van drie zijn, exact gelijk is aan het aantal partities van n in getallen die hoogstens twee keer voorkomen in de partitie.

Noteer ten slotte het aantal partities van n in *verschillende* getallen als $p_d(n)$ en het aantal partities in *oneven* getallen als $p_o(n)$. Zoek via hun genererende functies het verband tussen $p_d(n)$ en $p_o(n)$.

23. Het aantal manieren waarop n cent kan worden betaald met uitsluitend muntstukken van één cent wordt uiteraard gegeven door de rij $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$. Met uitsluitend muntstukken van vijf cent wordt dat de rij $1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots$ en analoog voor andere munten. Noteer de genererende functie voor de rij met munten van k cent als $C_k(x)$.

    Bereken via de geschikte berekeningen op deze $C_k(x)$ het aantal manieren waarop vijf euro kan worden betaald met muntstukken van één, vijf, tien, twintig of vijftig cent.

24. Bewijs de stelling van Lucas: schrijf $m = m_0 + m_1 p + \ldots + m_k p^k$ en $n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_k p^k$ met m en n niet-negatieve gehele getallen en p priem, dan geldt:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod p$$

25. Zoek het aantal permutaties zonder fixpunten van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zo'n fixpuntvrije permutatie heet een derangement; het gezochte aantal wordt de n^{de} subfaculteit genoemd en $!n$ genoteerd. Bewijs allereerst een van volgende identiteiten: $!(n+1) = n \cdot (!n + !(n-1))$ of $!(n+1) = (n+1) \cdot !n - (-1)^n$.

    Stel uit de bewezen identiteit de exponentiële genererende functie op en bepaal een expliciete formule voor $!n$. Gebruik deze formule om het volgende bekende resultaat aan te tonen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n} = e$$

5 Meer info

- BENDER, E., WILLIAMSON, S., *Foundations of Combinatorics with Applications* (2006). `http://www.math.ucsd.edu/~ebender/CombText/`.
- DEBRY, C., *Generating functions* (2011). `https://perswww.kuleuven.be/~u0074091/Generating%20functions.pdf`.
- KNUTH, D., GRAHAM, R., PATASHNIK, O., *Concrete Mathematics* (1994).
- MEYER, A., RUBINFIELD, R., *Mathematics for Computer Science* (2005). `http://courses.csail.mit.edu/6.042/fall05/ln11.pdf`.
- NOVAKOVIĆ, M., *Theory of Generating Functions*. `http://imomath.com/index.php?options=355`.
- SEDGEWICK, R., FLAJOLET, P., *An Introduction to the Analysis of Algorithms* (2012). `http://aofa.cs.princeton.edu/30gf/`.
- WILF, H., *Generatingfunctionology* (1994). `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`.
- YUAN, Q., *Topics in generating functions* (2009). `http://math.berkeley.edu/~qchu/TopicsInGF.pdf`

6 Oplossingen

1. - Verschuiving: $(a_n) \mapsto (a_{n-1})$ met $a_0 \mapsto 0$.
   - Herschaling: $(a_n) \mapsto (c^n \cdot a_n)$.
   - Differenties: $(a_n) \mapsto (a_n - a_{n-1})$, terwijl $a_0 \mapsto a_0$.
   - Vermenigvuldiging met de indices: $(a_n) \mapsto (n \cdot a_n)$.
   - Deling door de indices: $(a_n) \mapsto (\frac{a_{n-1}}{n})$, terwijl $a_0 \mapsto 0$.
2. - $G(a_n, x) = 1/(1-x^2)$.
   - $G(a_n, x) = \exp(x)$.
   - $G(a_n, x) = -\ln(1-x)$.
   - $G(a_n, x) = \ln(1+x)/2 - \ln(1-x)/2$.
3. Gegeven $A(x) = EG(a_n, x)$ en $B(x) = EG(b_n, x)$, dan werken we het product als volgt uit:

   $$A(x)\cdot B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k \cdot b_{n-k}}{n!}\right) x^n$$

   De rijen (a_n) en (b_n) worden dus omgezet in de rij $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot b_{n-k}\right)$, de zogeheten *binomiaalconvolutie*.
4. Uit oefening 2 weten we dat $G(\frac{1}{n}, x)$ gegeven wordt door $-\ln(1-x)$. Overgang op partieelsommen betekent de genererende functie vermenigvuldigen met $1/(1-x)$, zodat:

   $$G(H_n, x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

5. Analoog als het voorbeeld met Fibonaccigetallen vinden we de genererende functie:

   $$G(d_n, x) = \frac{x}{1-5x+6x^2} = -\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

   Nu herkennen we in de som de genererende functies van -2^n resp. 3^n. We vinden dus dat $d_n = 3^n - 2^n$.
6. We herkennen drie termen waarvan we de genererende functie snel kunnen opstellen, via overgang op partieelsommen en afleiden. Het volstaat dus de volgende identiteit te verifiëren:

   $$-\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{\ln(1-x)}{(1-x)}\right] - \frac{1}{(1-x)^2}$$

7. Vul $x = \frac{1}{2}$ in in de genererende functie van de harmonische getallen en je vindt $2\ln(2)$.
8. De gezochte som is de discrete convolutie van twee binomiaalcoëfficiënten. Het resultaat volgt makkelijk:

   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{\alpha}{i}\cdot\binom{\beta}{n-i}\right)\cdot x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}\cdot x^n\right) \\ &= (1+x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}\cdot x^n\end{aligned}$$

   Gelijkstellen van de coëfficiënten in beide genererende functies levert het gestelde.

9. De coëfficiënt van $(1+x)^{-1/2}$ bij x^n is volgens de veralgemeende binomiaalreeksontwikkeling gelijk aan $\binom{-1/2}{n}$. Na herschaling volgt dat die van $(1-4x)^{-1/2}$ gelijk is aan $(-4)^n \cdot \binom{-1/2}{n}$ en dit kunnen we verder uitwerken:

$$(-4)^n \cdot \binom{-1/2}{n} = (-4)^n \cdot \frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(1-2n)}{2^n\, n!} = \frac{(2^n\, n!)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!\, n!} = \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \binom{2n}{n}$$

10. We werken de recursierelatie opnieuw uit tot een functionele vergelijking voor de generende functie $G(x)$.

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + n + 1)\cdot x^n = 1 + 2x \cdot G(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}$$

Daaruit kunnen we $G(x)$ expliciet oplossen.

$$G(x) = \frac{x^2 - x + 1}{(1-2x)\cdot(1-x)^2} = -\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{3}{1-2x}$$

Na splitsen in partieelbreuken herkennen we de genererende functies van de rijen $-(n+1)$, $-(1)$ en $(3\cdot 2^n)$. Dit betekent dat $a_n = 3\cdot 2^n - n - 2$.

11. We gebruiken $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = 2F_{n-2} + F_{n-3}$. Kwadrateren geeft:

$$\begin{aligned} F_n^2 &= F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} \\ &= 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 + 4F_{n-2}F_{n-3} \end{aligned}$$

Als we in de eerste vergelijking overgaan naar index $n-1$ kunnen we de gemengde term elimineren:

$$2F_{n-1}^2 - 2F_{n-2}^2 - 2F_{n-3}^2 = F_n^2 - 4F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$$

Hieruit vinden we de recursierelatie $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$.

Analoog als bij de klassieke Fibonaccigetallen volgt daaruit hun genererende functie:

$$G(F_n^2, x) = \frac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

12. Het aantal manieren om een zak te vullen met uitsluitend appels wordt gegeven door de rij $1, 0, 1, 0, 1, 0\ldots$ en heeft genererende functie $1/(1-x^2)$. Met uitsluitend bananen wordt dit $1/(1-x^5)$. Voor sinaasappels is de rij eindig: $1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots$ met als genererende functie $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = (1-x^5)/(1-x)$. Voor peren ten slotte is het nog eenvoudiger: $1 + x$.

Het aantal mogelijkheden om op reglementaire wijze n stukken fruit te kiezen heeft als genererende functie juist het product van de vier functies hierboven:

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Deze uitkomst herkennen we als de genererende functie van de rij $(n+1)$, zodat we op exact $n+1$ manieren een zak met n stukken fruit kunnen vullen met de gestelde voorwaarden!

13. De stelling van Fubini garandeert dat we mogen som en integraal verwisselen, gegeven dat de integraal bestaat.

$$\int_0^\infty EG(a_n, xt)\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!}\cdot (xt)^n\right)\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!}\cdot \int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = G(a_n, x)$$

14. De gezochte rij is de discrete convolutie van (n) en (g_n) op de eerste term na ($g_0 \neq 0$). We kunnen als volgt de genererende functie $G(x)$ bepalen:

$$G(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} i \cdot g_{n-i} \right) \cdot x^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} \cdot G(x)$$

Waaruit $G(x) = 1 + x/(1 - 3x + x^2)$. We herkennen hier niet direct een bekende vorm, maar na berekening van de eerste termen kunnen we vermoeden dat de rij precies de Fibonaccigetallen met even index F_{2n} bevat, opnieuw op de eerste term na. We kunnen dit vermoeden als volgt hard maken. Uit een willekeurige rij met genererende functie $\varphi(x)$ kunnen we de termen met oneven index wegfilteren door over te gaan op de functie $(\varphi(x) + \varphi(-x))/2$. Dit toepassen op de genererende functie $F(x)$ van de Fibonaccigetallen levert ons:

$$\bar{F}(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2} = \frac{x^2}{1 - 3x^2 + x^4} = G(x^2) - 1$$

M.a.w. de coëfficiënt bij x^n in $G(x)$ is die bij x^{2n} in $\bar{F}(x)$, zodat $g_n = F_{2n}$, behalve voor $n = 0$ waar $g_0 = 1$.

15.
- Als zo'n deelverzameling n bevat, is de rest een deelverzameling van $1, 2, \ldots, n-2$ zonder twee opeenvolgende, en zo zijn er juist $f(n-2)$. In het andere geval wordt de rest geteld door $f(n-1)$. In totaal zijn er dus $f(n) = f(n-2) + f(n-1)$ geldige deelverzamelingen. Samen met de startwaarden $f(1) = 2$ en $f(2) = 3$ volgt dat $f(n)$ het $(n+2)^{\text{de}}$ Fibonaccigetal is.
- Als zo'n deelverzameling n bevat, dan wordt de rest geteld door $f(n-2, k-1)$, anders wordt de volledige deelverzameling geteld door $f(n-1, k)$. Dus $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)$ voor $k \geq 2$. Definieer vervolgens $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n,k) \cdot x^n$, dan volgt uit de recursierelatie:

  $$F_k(x) = \frac{x^2}{1-x} \cdot F_{k-1}(x)$$

  Omdat $F_1(x) = x/(1-x)^2$ vinden we finaal dat $F_k(x) = x^{2k-1}/(1-x)^{k+1}$. De coëfficiënt bij x^n volgt uit de binomiaalreeksontwikkeling:

  $$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$$

  Merk op dat dit samen met deel één betekent dat $\sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k}$ gelijk is aan het $(n+2)^{\text{de}}$ Fibonaccigetal!
- Voor de cyclische variant verloopt de oplossing volstrekt analoog.

16.
- De afstand tussen de frisbees langs de vijfhoek kan zodanig gekozen worden dat die even is, en is dan gelijk aan 0, 2 of 4 (initieel 4). Noteer $A(x)$, $B(x)$ en $C(x)$ voor de respectievelijke genererende functies van hun kansen, zodat bijvoorbeeld de coëfficiënt van x^n in $C(x)$ de kans op afstand 4 na n worpen voorstelt. Dan voldoen deze aan volgende functionele vergelijkingen:

  $$\begin{cases} A(x) = xB(x)/4 \\ B(x) = xB(x)/2 + xC(x)/4 \\ C(x) = xB(x)/4 + 3xC(x)/4 \end{cases}$$

  Zo vinden we dat $A(x) = x^2/(16 - 20x + 5x^2)$.
- Na een hele krachttoer blijkt dat men $A(x)$ als volgt kan schrijven:

  $$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{5}} \left(\frac{x}{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8} \cdot x} - \frac{x}{1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} \cdot x} \right)$$

Hieruit blijkt:

$$p_n = \frac{1}{4\sqrt{5}} \left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8} \right)^{n-1} - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8} \right)^{n-1} \right)$$

- De gezochte verwachtingswaarde is per definitie gelijk aan $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$. Dit betekent dat we deze kunnen berekenen door de genererende functie af te leiden en te evalueren in $x = 1$, en men vindt dat $A'(1) = 12$.

17. Een standaard dobbelsteen kan worden voorgesteld door de genererende functie $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Een exponent stelt de score voor en de bijhorende coëfficiënt het aantal mogelijkheden om deze score te gooien. De mogelijke uitkomsten bij het gooien van twee dobbelstenen vinden we door deze veelterm te kwadrateren: $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$.

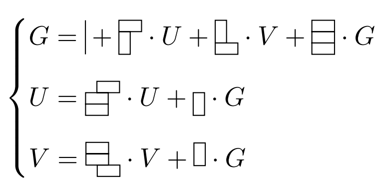
    De genererende functie voor een enkele dobbelsteen is ontbindbaar tot $x \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1)$. Het gezochte paar dobbelstenen vinden we door het kwadraat van deze uitdrukking te schrijven als een product van twee factoren, waarvan de coëfficiënten sommeren tot zes (zes vlakken) en allen strikt positief zijn (minstens één stip op elk vlak). Men kan nagaan dat slechts één zo'n alternatieve factorisatie bestaat:

$$\begin{cases} x \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \\ x \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \end{cases}$$

    Dit betekent dat de gezochte dobbelstenen $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$ en $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ stippen hebben. Deze bijzondere dobbelstenen heten de dobbelstenen van Sicherman.

18. We gebruiken een alternatieve genererende functie $G(x)$, waarvan de coëfficiënt bij x^k het aantal manieren voorstelt om een $3 \times n$-bord te bedekken met k domino's van grootte 2×1 (dus hier geldt $3n = 2k$). We definiëren $U(x)$ als de analoge genererende functie voor een $3 \times (n+1)$-bord waarvan de linkerbovenhoek ontbreekt en $V(x)$ voor de genererende functie voor een $3 \times (n+1)$-bord waarvan de linkeronderhoek ontbreekt. Het is niet moeilijk in te zien dat een $3 \times (n+1)$-bord waarvan het middenste blokje in de eerste kolom ontbreekt, niet te bedekken valt met domino's.

    Noteren we de operatie die twee correct bedekte borden aan elkaar plakt als " $\cdot$ " en laten we G, U en V overeenstemmen met de respectievelijke borden uit hun genererende functies, dan kunnen we als volgt weergeven hoe deze borden recursief opgebouwd kunnen worden:



    De laatste lijn betekent bijvoorbeeld dat een V-bord kan bestaan uit drie horizontale domino's met een kleiner V-bord eraan geplakt, of een enkele verticale domino met een G-bord. Als we in deze visuele weergave de aparte domino's vervangen door passende machten van x vinden we functionele vergelijkingen waaraan onze genererende functies moeten voldoen.

$$\begin{cases} G(x) = 1 + x^2 \cdot U(x) + x^2 \cdot V(x) + x^3 \cdot G(x) \\ U(x) = x^3 \cdot U(x) + x \cdot G(x) \\ V(x) = x^3 \cdot V(x) + x \cdot G(x) \end{cases}$$

    Daaruit kunnen we $G(x)$ oplossen:

$$G(x) = \frac{1-x^3}{1-4x^3+x^6} = \frac{(3+\sqrt{3})/6}{1-(2+\sqrt{3}) \cdot x^3} + \frac{(3-\sqrt{3})/6}{1-(2-\sqrt{3}) \cdot x^3}$$

De coëfficiënt bij x^k is (zoals verwacht) enkel verschillend van nul als $k = 3\ell$ en dan is die gelijk aan $(3+\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})^\ell/6 + (3-\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})^\ell/6$. Daaruit leiden we af voor a_n, het gevraagde aantal geldige bedekkingen van een $3 \times n$-rooster (met dan $k = 3n/2$ domino's):

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (2+\sqrt{3})^\ell + \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (2-\sqrt{3})^\ell & \text{indien } n = 2\ell \text{ even} \\ 0 & \text{indien } n \text{ oneven} \end{cases}$$

20. Als A in de beschreven vorm k paren haakjes bevat, dan moet B er $n-k-1$ bevatten. Bovendien kan het aantal in A variëren van 0 tot $n-1$ en is het duidelijk dat verschillende A's en B's ook verschillende groeperingen $(A)B$ vormen. Dit betekent dat de volgende recursierelatie geldt voor $n \geq 1$:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

We herkennen een convolutie van de Catalangetallen met zichzelf! Dan is de genererende functie $C(x)$:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = 1 + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) \cdot x^n = 1 + x \cdot C(x)^2$$

Daaruit vinden we $C(x) = (1 \pm \sqrt{1-4x})/2x$. Die met een plusteken heeft een pool in nul en kunnen we dus niet gebruiken als genererende functie. De coëfficiënt bij x^n in die met het minteken kunnen we uitwerken met de veralgemeende binomiaalreeksformule. Merk op dat de term $1/2x$ wegvalt met de term $1/2x$ in de reeksontwikkeling van $-\sqrt{1-4x}/2x$; we zoeken dus eigenlijk de coëfficiënt van x^n in de reeks van $-\sqrt{1-4x}/2x$.

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2} \cdot \binom{1/2}{n+1} \cdot (-4)^{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot (-4)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} = 2^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} \\ &= 2^n \cdot \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)) \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

23. Allereerst is $C_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}$. Het aantal manieren om vijf euro te betalen wordt gegeven door de coëfficiënt van x^{500} in $C_1(x) \cdot C_5(x) \cdot C_{10}(x) \cdot C_{20}(x) \cdot C_{50}(x) = \big((1-x) \cdot (1-x^5) \cdot (1-x^{10}) \cdot (1-x^{20}) \cdot (1-x^{50})\big)^{-1}$. *Concrete Mathematics* (blz. 345) vermeldt een methode om dit manueel uit te rekenen; het resultaat is 73161.

24. Merk op dat $(1+x)^{p^j} \equiv 1 + x^{p^j} \pmod{p}$, aangezien elke $\binom{p^j}{i}$ deelbaar is door p behalve voor $i = 0$ en $i = p^j$.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m = (1+x)^n &= \prod_{j=0}^{d} \left((1+x)^{p^j}\right)^{n_j} \equiv \prod_{j=0}^{d} \left(1 + x^{p^j}\right)^{n_j} \\ &= \prod_{j=0}^{d} \left(\sum_{m_j=0}^{n_j} \binom{n_j}{m_j} x^{m_j p^j} \right) = \sum_{m=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{d} \binom{n_j}{m_j} \right) x^m \pmod{p} \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten in eerste en laatste uitdrukking levert het gestelde.

25. - De exponentiële genererende functie $D(x)$ laat zich makkelijker vormen vanuit de tweede identiteit.

$$\begin{aligned} D(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} !n \cdot \frac{x^n}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot !(n-1) \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} \\ &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} !(n-1) \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-x} \\ &= x \cdot D(x) + e^{-x} \end{aligned}$$

Zo blijkt dat $D(x) = e^{-x}/(1-x)$. Vanuit de eerste identiteit lukt het ook maar dan is de functionele vergelijking voor $D(x)$ een differentiaalvergelijking.

- We kunnen $D(x)$ kennelijk als volgt schrijven:

$$D(x) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} x^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-x)^q}{q!} \right)$$

Neem in beide leden de coëfficiënt bij x^n:

$$\frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

- Mocht de som over k lopen van 0 tot ∞, dan convergeert deze naar $1/e$.

$$\frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} - \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

De corrigerende term wordt duidelijk algauw zeer klein voor $n \to \infty$, waaruit de gevraagde limiet volgt. In feite geldt zelfs het sterkere resultaat dat $!n$ precies het natuurlijke getal is dat het dichtst bij $n!/e$ ligt.