



PUMAthematics

10 maart 2014

Wedstrijdreglement

- De competitie bevat zes vragen, die elk op evenveel punten staan. Je krijgt 150 minuten de tijd om zoveel mogelijk vragen op te lossen.
- Handboeken, rekenmachines, gsm's en andere hulpmiddelen zijn hierbij niet toegestaan, enkel pen en papier mogen gebruikt worden.
- Vermeld op ieder ingediend blad duidelijk je naam, jaar en richting, en de vraag. Werk op elk blad maar aan één vraag.
- Bij verdere vragen of betwistingen is uitsluitend de jury bevoegd.
- Door deel te nemen aan de PUMA 2014 verklaart men zich akkoord met dit reglement.

De proclamatie van deze wedstrijd gaat door op 14 maart 2014 om 13.00h in gebouw S9, auditorium A3. Wil je weten naar wie de 60 euro prijzengeld gaat of wie de eer van de Universiteit Gent mag verdedigen op de IMC 2014, beschouw dit dan gerust als een uitnodiging. Wil je een pizza bestellen, dan kan je dat op voorhand (voor woensdagavond) op onze website ingeven. Verdere informatie verschijnt tijdig op onze website: <http://prime.ugent.be>.



PUMAthematics

10 maart 2014

Vragen

1 Een beker met water

We willen een beker, die de vorm van een cilinder heeft, vullen met water zodanig dat het massamiddelpunt van de beker met het water zich zo laag mogelijk bevindt. We hebben onze eenheden zo gekozen dat de dikte van de bodem 1 is en de dikte van de wand is $1/6$. De binnendiameter van de beker is 4 en de hoogte van de beker is 8. De massadichtheid van het materiaal waaruit de beker gemaakt is, is twee keer zo groot als de massadichtheid van water. Hoe hoog moet het water in de beker staan?

Ter herinnering: voor een object dat het volume $V \subset \mathbb{R}^3$ inneemt en $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ als massadichtheid heeft, is het massamiddelpunt gegeven door

$$\vec{r}_C = \left(\int_V \rho(\vec{r}) d\vec{r} \right)^{-1} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Voor een stelsel puntmassas met plaatsvectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m$ en, respectievelijk, massas $M_1, \dots, M_m$ is het massamiddelpunt gegeven door

$$\vec{r}_C = (M_1 + \dots + M_m)^{-1} (M_1 \vec{r}_1 + \dots + M_m \vec{r}_m).$$

2 Een delicate som

Zij n een oneven natuurlijk getal. Toon aan dat

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \text{ggd}(k, n) = n.$$

3 Lissajousfiguren

Zij $a, b \in \mathbb{Q}$. De grafiek van de periïdieke afbeelding

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(2\pi at), \cos(2\pi bt))$$

noemt men een Lissajousfiguur. In hoeveel verschillende punten snijdt een Lissajousfiguur zichzelf?



PUMAthematics

10 maart 2014

4 Twee kegels, twee bollen

Op een horizontaal vlak liggen 2 kegels en 2 bollen. Elke bol raakt aan beide kegels. Beide bollen hebben straal 1. De toppen van de kegels vallen samen. De hoek tussen de raaklijn van de ene kegel aan het vlak en die van de andere is 120° . Beide kegels hebben een openingshoek van 60° , i.e. de hoek tussen de as en de mantel van elke kegel is 30° . Wat is de afstand tussen de middelpunten van de bollen?

5 PUMA-tupels

Met een n -tal $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ kunnen we een periodieke rij $t_1, t_2, \dots, t_n, t_1, t_2, \dots, t_n, t_1, t_2, \dots$ associëren.

Van een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ kunnen we een nieuwe rij maken door groepjes opeenvolgende termen samen te nemen. Meer precies gaat dit als volgt: kies een strikt stijgende rij van indices $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m < \dots$. Dan is de nieuwe rij

$$\left(\sum_{j=i_m+1}^{i_{m+1}-1} x_j \right)_{m \in \mathbb{N}^+}.$$

Een n -tal $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ van natuurlijke getallen (> 0) noemen we een *PUMA-tupel* als het mogelijk is om er achtereenvolgens deze 2 operaties (periodieke rij van maken en termen samennemen) op toe te passen en zo de rij $1, 3, 5, 7, \dots$ van de oneven getallen te bekomen.

Hoeveel PUMA-tupels zijn er waarvoor de som van de elementen gelijk is aan 53?

6 Een familie lineaire afbeeldingen

Zij V een eindig dimensionale $\mathbb{C}$ -vectorruimte. Zij M een lineaire deelruimte van $L(V, V)$, de ruimte van de lineaire afbeeldingen van V naar V . Voor alle $a, b \in M$ geldt $a \circ b = b \circ a$. Toon aan dat $\dim(M) \leq \dim(V)$.