



PUMAthematics

10 maart 2014

Antwoorden

1 Een beker water

We normeren massa zodanig dat 1 volume-eenheid water, massa 1 heeft.

We gebruiken de formule voor het volume van een cilinder. De massa van de rand is

$$M_r = 2 \cdot \pi(1/36 + 2 \cdot 1/6 \cdot 2 + 4 - 4)36/5 = 2\pi 25/36 \cdot 36/5 = 10\pi.$$

De verticale coördinaat van massamiddelpunt van wand van de beker is, wegens symmetrie, $z_r = 18/5$. De massa van de bodem (zonder rand) is $M_b = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ en de verticale coördinaat van het massamiddelpunt is $z_b = 1/2$. De massa van de hele beker is dus $M_B = 18\pi$ en het massamiddelpunt van de lege beker is

$$z_B = \frac{M_b z_b + M_r z_r}{M_B} = \frac{4\pi + 36\pi}{18\pi} = 40/18 = 20/9.$$

Als het water in de beker $h \geq 0$ lengte-eenheden hoog staat, dan kennen we dat de massa van dit water: $M_w = 4\pi h$ en de verticale coördinaat van het massamiddelpunt van het water is $z_w = 1 + h/2$. We hebben dat $M_w z_w = (4h + 2h^2)\pi$. Voor het massamiddelpunt van het geheel vinden we dus de volgende uitdrukking

$$z_t = \frac{M_B z_B + M_w z_w}{M_B + M_w} = \frac{40 + 4h + 2h^2}{18 + 4h} = \frac{20 + 2h + h^2}{9 + 2h}.$$

Als we deze uitdrukking afleiden naar h vinden we

$$z'_t = \frac{(9 + 2h)(2 + 2h) - 2(20 + 2h + h^2)}{(9 + 2h)^2}.$$

We zien z_t dus dat enkel extrema kan bereiken in nulpunten van $-11 + 9h + h^2$. En dus voor $h = 1/2(-9 \pm 5\sqrt{5})$. Gezien $h = 1/2(-9 + 5\sqrt{5})$ een enkelvoudig nulpunt is van z'_h en z'_h negatief is links is van dit nulpunt (bijvoorbeeld in 0) zien we dat dit een minimum is.



PUMAthematics

10 maart 2014

2 Een delicate som

We zullen de klassieke formule $m = \sum_{d|m} \phi(d)$ tweemaal toepassen. Als we deze formule toepassen op $\text{ggd}(k, n)$ vinden we

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \text{ggd}(k, n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{d|\text{ggd}(k, n)} \phi(d).$$

We kunnen in het rechterlid gelijke termen samen nemen en vinden

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \text{ggd}(k, n) = \sum_{d|n} \phi(d) \sum_{j=1}^{n/d} (-1)^{jd-1}.$$

Daar nu n oneven is, is tevens ook elke deler n/d van n oneven en heeft de som $\sum_{j=1}^{n/d} (-1)^{jd-1}$ dus een oneven aantal termen, i.e., $\sum_{j=1}^{n/d} (-1)^{jd-1} = 1$. We besluiten dat

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \text{ggd}(k, n) = \sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

3 Lissajoufiguren

Stel $a = p/q$ en $b = r/s$ met $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Na een herschaling van $t \rightarrow \frac{qs}{\text{ggd}(ps, rq)} t$ krijgen we

$$f : t \mapsto (\sin(2\pi mt), \cos(2\pi nt))$$

waarbij $m = \frac{ps}{\text{ggd}(ps, rq)} \in \mathbb{Z}$ en $n = \frac{rq}{\text{ggd}(ps, rq)} \in \mathbb{Z}$. Merk op dat m en n copriem zijn en $\sin$ en $\cos$ periode 2π hebben. f doorloopt dus 1 periode als t over een interval met lengte 1 loopt, bijvoorbeeld $[0, 1]$.

De beschouwde Lissajousfiguur snijdt zichzelf als en slechts als voor zekere, verschillende $t, u \in \mathbb{R}$ geldt $f(t) = f(u)$ en $|t - u| < 1$. We kunnen de gelijkheid herschrijven als

$$\begin{cases} \sin(2\pi mt) = \sin(2\pi mu) \\ \cos(2\pi nt) = \cos(2\pi nu) \end{cases}$$

of als

$$\begin{cases} t = u + j/m \text{ of } t = -u + j/m \text{ met } j \in \{0, \dots, |m| - 1\} \\ t = u + k/n \text{ of } t = 1/2 - u + k/n \text{ met } k \in \{0, \dots, |n| - 1\} \end{cases}$$



PUMAthematics

10 maart 2014

waarbij we nog steeds de bijkomende eis $t \neq u$ hebben. We onderzoeken de vier mogelijkheden.

Als de twee eerste gelijkheden gelden, dan krijgen we $km = jn$, wat, gezien m en n copriem zijn, niet kan tenzij $j = k = 0$, maar dan hebben we $u = t$.

Als de tweede en de eerste gelijkheid gelden dan krijgen we wegens $t = u + k/n$ automatisch dat $|t - u| < 1$ en geldt $t = u$ als en slechts als $k = 0$. Voor alle andere $|m|(|n| - 1)$ keuzes van j en k vinden we punten waarop de Lissajousfiguur zichzelf snijdt.

Als de eerste en de tweede gelijkheid gelden dan krijgen we wegens $t = u + j/m$ automatisch dat $|t - u| < 1$ en geldt $t = u$ als en slechts als $j = 0$. Voor alle andere $(|m| - 1)|n|$ keuzes van j en k vinden we punten waarop de Lissajousfiguur zichzelf snijdt.

Als de twee laatste gelijkheden gelijktijdig gelden dan vinden we dat $jn = mn/2 + km$. Als mn oneven is dan is dit een strijdigheid en als m of n even is dan krijgen we gezien n en m copriem zijn dat $j = k = 0$. In dit geval vinden we dus geen punten waar de Lissajousfiguur zichzelf snijdt. Dit toont ook aan dat de vorige twee gevallen zich niet gelijktijdig kunnen voordoen, we hebben dus geen punten dubbel geteld.

We besluiten dat de Lissajousfiguur zichzelf $|m|(|n| - 1) + |n|(|m| - 1)$ keer snijdt.

4 Twee kegels, twee bollen

We kiezen een assenstelsel zo, dat het gegeven vlak samenvalt met het xy -vlak, de gezamenlijke top van de kegels in de oorsprong ligt, en de y -as de bissectrice is van de 2 raaklijnen van de kegels aan het vlak. Bollen en kegels liggen in het deel van de ruimte waar $z \geq 0$. Uit symmetrie-overwegingen zien we dat het middelpunt A van een bol die aan beide kegels raakt, in het yz -vlak moet liggen, en ook dat als zo'n bol aan één van beide kegels raakt, hij ook aan de andere raakt. We beschouwen vanaf nu dus enkel nog de "rechtse"kegel (i.e. die aan de $x \geq 0$ kant). Gezien onze bol straal 1 heeft en aan het xy -vlak raakt, heeft het middelpunt A coördinaten $(0, a, 1)$ voor een zekere a . De vraag is nu om de 2 waarden a_1 en a_2 te zoeken die a kan aannemen, en hun verschil $|a_1 - a_2|$ te bepalen.

Figuur 1 stelt het vlak opgespannen door A en de as van de kegel voor. De bol raakt aan de kegel in het punt C , en de rechte AB snijdt de as van de kegel in C . Omdat A coördinaten $(0, a, 1)$ heeft, geldt $|OA|^2 = a^2 + 1$. Anderzijds volgt uit de Stelling van Pythagoras in de driehoek ABO dat $|OA|^2 = |OB|^2 + 1$. Er volgt dat $|OB| = |a|$. We vinden ook dat $|BC| = |OB| \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}|a|$. De projectie van A op het xy -vlak noemen we A' ; de projectie van C op het xy -vlak noemen we C' . Figuur 2 toont de vierhoek (rechthoekig trapezium) $ACC'A'$. $|CB| = |CC'|$ volgt uit symmetrie van de kegel (B en C' zijn beide projecties van C op de kegelmantel).



PUMAthematics

10 maart 2014

Door de Stelling van Pythagoras vinden we dat $|A'C'| = \sqrt{|AC|^2 - (|AA'| - |CC'|)^2} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}|a|}$.

Figuren 3 en 4 stellen het xy -vlak voor; figuur 3 in het geval $a > 0$ en figuur 4 in het geval $a < 0$. Opnieuw wegens B en C' beide projecties van C op de kegelmantel volgt dat $|OC'| = |OB| = |a|$.

In het geval $a > 0$ merken we op dat de driehoek $OA'C'$ gelijkzijdig is (want gelijkbenig met tophoek 60°), en dus is $|A'C'| = |a|$. Maar we hadden hierboven al dat $|A'C'| = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}|a|}$. Gelijkstellen en uitwerken geeft ons $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

In het geval $a < 0$ vinden we, bijvoorbeeld door de cosinusregel in driehoek $OA'C'$, dat $|A'C'| = \sqrt{3}|a|$. Deze keer levert gelijkstellen met $|A'C'| = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}|a|}$ dat $|a| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, dus $a = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

We hebben dus de 2 mogelijke waarden voor a gevonden, namelijk $a_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ en $a_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$. Hun verschil $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ is dan de gezochte afstand.

5 PUMA-tupels

Noteer $p = 53$.

Zij $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ een n -tupel met $t_1 + \dots + t_n = p$. We noteren zijn periodieke rij als $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots$, waarbij dus, voor alle i , $t_i = t_{i+n}$.

We bewijzen eerst de volgende bewering. Een nodige en voldoende voorwaarde opdat $\vec{t}$ een PUMA-tupel zou zijn, is dat er voor elke $k > 0$ een i_k bestaat zodat $t_1 + \dots + t_{i_k} = k^2$.

Bewijs. Merk op dat 2 rijen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ en $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ gelijk zijn als en slechts als hun rijen van partieelsommen $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n, \dots$ en $b_1, b_1 + b_2, \dots, b_1 + \dots + b_n, \dots$ gelijk zijn. $\vec{t}$ is een PUMA-tupel als en slechts als de rij $1, 3, 5, \dots$ gelijk is aan de rij

$$t_1 + \dots + t_{i_1}, t_{i_1+1} + \dots + t_{i_2}, \dots, t_{i_k+1} + \dots + t_{i_{k+1}}, \dots$$

voor zekere k_i . Wegens bovenstaande opmerking, en de bekende identiteit $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ is dit gelijkwaardig met zeggen dat de rij $1, 4, 9, \dots$ gelijk is aan de rij

$$t_1 + \dots + t_{i_1}, t_1 + \dots + t_{i_2}, \dots, t_1 + \dots + t_{i_{k+1}}$$

voor zeker k_i . □

Door elke i_k te schrijven als $m_k n + r_k$ met $r_k < n$ (dit kan op unieke wijze) en op te merken dat

$$t_1 + \dots + t_n = t_{n+1} + \dots + t_{2n} = \dots = p$$



PUMAthematics

10 maart 2014

wordt de nodige en voldoende voorwaarde dat er voor elke $k > 0$ een m_k en $r_k < n$ bestaan zodat

$$m_k p + t_1 + \dots + t_{r_k} = k^2$$

of nog, dat er voor elke $k > 0$ een $r_k < n$ bestaat zodat

$$t_1 + \dots + t_{r_k} \equiv k^2 \pmod{p}.$$

(Merk op dat voor $k \equiv 0 \pmod{p}$ hieraan voldaan is door $r_k = 0$ te kiezen.)

Merk nu op dat onze $\vec{t}$ uniek vastligt als we de verzameling van partieelsommen

$$\{t_1, t_1 + t_2, \dots, t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, p-1\}$$

vastleggen. De voorwaarde opdat $\vec{t}$ een PUMA-tupel zou zijn, is precies dat deze verzameling van partieelsommen alle niet-nul kwadraatresten modulo p bevat. M.a.w. het aantal PUMA-tupels met som p is het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \dots, p-1\}$ die alle niet-nul kwadraatresten modulo p bevatten.

Nu is p een priemgetal, en dus zijn er $\frac{p-1}{2}$ niet-nul kwadraatresten modulo p . Om een deelverzameling van $\{1, 2, \dots, p-1\}$ te maken die al deze kwadraatresten bevat, moeten we enkel nog beslissen welke van de $\frac{p-1}{2}$ niet-kwadraatresten modulo p we in onze verzameling gaan stoppen. Dit kan op $2^{\frac{p-1}{2}}$ manieren, en dus zijn er $2^{\frac{p-1}{2}}$ zulke verzamelingen.

We vinden dus als antwoord 2^{26} .

6 Een familie lineaire afbeeldingen

Zij $n = \dim(V)$. We werken met inductie op n . Voor $n \in \{0, 1\}$ is de stelling triviaal.

Merk op dat wegens de distributiviteit voor een verzameling commuterende lineaire afbeeldingen geldt dat ook hun lineaire combinaties commuteren. We nemen aan dat de identieke afbeelding I in L bevat is. Deze commuteert namelijk met alle afbeeldingen en we kunnen dus L vervangen door $\langle L \cup \{I\} \rangle$. Zij $A, B \in L$ willekeurig. Zij W een veralgemeende eigenruimte van A i.e., voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt $w \in W \Leftrightarrow (I\lambda - A)^n w = 0$. Gezien $B(I\lambda - A)^n = (I\lambda - A)^n B$ vinden dus dat $w \in W \Rightarrow Bw \in W$. Zij $V_1, \dots, V_j$ de veralgemeende eigenruimten van A . Gezien $V_1 \oplus \dots \oplus V_j = V$ stellen dus vast dat voor alle $k = 1, \dots, j$ geldt $Bv \in V_k \Leftrightarrow v \in V_k$.

Zij $A_1, \dots, A_m$ een basis voor L . Zij W_1 een veralgemeende eigenruimte van A_1 . Voor alle $k = 1, \dots, m$ is wegens het voorgaande $A_k|_{W_1}$ een afbeelding van W_1 naar W_1 . Zij $W_2 \subseteq W_1$ een veralgemeende eigenruimte van $A_2|_{W_1}$. Wegens het voorgaande is voor alle $k = 1, \dots, m$ $A_k|_{W_1|W_2} = A_k|_{W_2}$ een afbeelding van W_2 naar W_2 . Herhalen



PUMAthematics

10 maart 2014

we dit m keer dan vinden we $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_m$ deelruimten van veralgemeende eigenruimten van respectievelijk $A_1, \dots, A_m$. We hebben ook dat voor alle $k = 1, \dots, m$ geldt $A_k W_m \subseteq W_m$. We kunnen dus V schrijven als $V = V' \oplus W_m$ met voor alle $A \in L$ $AV' \subseteq V'$ en $AW_m \subseteq W_m$. Zij voor alle k λ_k de eigenwaarde van $A_k|_{W_m}$ en stel $B_k = A_k - \lambda_k I$, dan is $\langle I, B_1, \dots, B_m \rangle = L$. Merk op dat niet enkel $B_1, \dots, B_m$ nilpotent zijn maar ook hun lineaire combinaties.

Zij $l \in \mathbb{N}$ maximaal zodanig dat er een $B \in \langle B_1, \dots, B_m \rangle$ en een $b \in W_m$ bestaan zodanig dat $B^l b \neq 0$ en $B^{l+1} b = 0$. Zij $W' = \langle b, Bb, \dots, B^l b \rangle$. Wegens de maximaliteit van l hebben we dus $w \in W' \Leftrightarrow B^{l+1} w = 0$. Zij $A \in \langle B_1, \dots, B_m \rangle$ willekeurig. Als $w \in W'$ dan hebben we $B^{l+1} Aw = AB^{l+1} w = 0$ we hebben dus $BW' \subseteq W'$. Omgekeerd willen we ook hebben dat $B^{l+1} Aw = 0 \Rightarrow w \in W'$. Onderstel dat dit niet zo is dan hebben we $B^{l+1} w \neq 0$ en dus hebben voor $x > 0$, groot genoeg, $(A + xB)^{l+1} w \neq 0$, wat in strijd is met de maximaliteit van l . Schrijven we nu V als $V'' \oplus W'$, dan hebben we voor alle $A \in L$ $AW' \subseteq W'$ en $AV'' \subseteq V''$.

We weten dus dat $A \in L$ volledig bepaald is door $A|_{V''}$ en $A|_{W'}$. Per inductie weten we dat $\dim(\{A|_{V''} : A \in L\}) \leq \dim(V'')$, on rest dus aan te tonen dat $\dim(\{A|_{W'} : A \in L\}) \leq \dim(W')$. Zij $A \in L$. De basis van W' is $\{b, \dots, B^l b\}$. We weten dat $Ab = a_0 b + \dots + a_l B^l b$. Anderzijds definieert deze uitdrukking ook $AB^k b$ voor alle $k = 0, \dots, l$ want A en B commuteren. We zien dus dat de afbeelding $A|_{W'} \mapsto (a_0, \dots, a_l)$ een injectie is van $\{A|_{W'} : A \in L\}$ naar een $l+1$ dimensionale ruimte.