



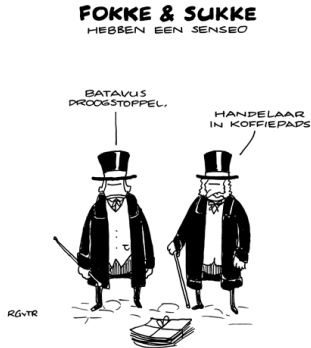
Fysica als wiskundig laboratorium

(ongecensureerde versie)

David Eelbode
Departement Wiskunde-Informatica
Universiteit Antwerpen
België



*Spreekwoorden bevatten de wysheid der volkeren.
Eilieve, waarom maken professors geen spreekwoorden?*
(Multatuli, Idee 281)





- ▶ *Is 't wiskundig idee niet fysisch geïnspireerd,
dan is 't probleem de reflectie nie'weerd.*
(Eelbode, Spreekwoord 1)
- ▶ *Staat de fysicus aan de toog zijn dorst reeds te laven,
dan is de wiskundige nog steeds de convergentie aan 't staven.*
(Eelbode, Spreekwoord 2)
- ▶ *Gaan fysici dan werkelijk nooit of te nimmer leren,
dat afleiden en integreren niet altijd commuteren?*
(Eelbode, Spreekwoord 3)



Het fysische probleem

Erwin Schrödinger (1925): vergelijking voor quantum-systemen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \underline{x}) = \hat{H} \Psi(t, \underline{x})$$

Typische vorm voor de Hamiltoniaan (met potentiaalterm):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(t, \underline{x})$$

Probleem: niet relativistisch verantwoord (tijd versus ruimte)!



****SPOILER ALERT****



De duiven van Henri



De Dirac-operator

Oplossing: werken met eerste-orde operatoren (tijd én ruimte)

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \xrightarrow{?} D^{(1)} = \sqrt{\Delta_3}$$

Dirac: *"The Quantum Theory of the Electron"* (1928)

$$D^{(1)} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

De γ^μ zijn (uiteraard) geen getallen: zou mengtermen $2\gamma^\mu \gamma^\lambda \partial_\mu \partial_\lambda$ geven
(to be continued: cursus QM)



Voorbeeld: $m = 2$ (complexe analyse)

- Factorisatie van de Laplace-operator in het vlak:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \partial_z^c \partial_z$$

i.e. de Cauchy-Riemann-operator (+ toegevoegde) aan het werk

- Kunnen we nóg meer symmetrisch factoriseren?

$$\Delta_2 \sim (\text{operator})^2$$



Vraag die de Slimste Mens *niet* haalde

“Wat weet u over het getal i ?”

- ▶ Het kwadraat is negatief: $i^2 = -1$
- ▶ Zit in het veld der complexe getallen $\mathbb{C}$
- ▶ Ingenieurs stellen het meestal voor als j
- ▶ Stelt meetkundig een rotatie voor

$$i \in \mathbb{C} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

De rotatie onder de loep

- ▶ Vermenigvuldigen met $i \in \mathbb{C}$ doet het volgende:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Rotatie rond de as $e_3 = e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1$
- ▶ Als we nu eens het symbool $\times$ weggooien*

$$e_1 e_2 [e_1] = -e_2 e_1 [e_1] = +e_2$$

$$e_1 e_2 [e_2] = -e_1$$

- ▶ Suggereert de volgende algebraïsche relaties:

$$e_1^2 = e_2^2 = -1$$

$$e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$$

* *Disclaimer:* deze actie is eigenlijk een commutator (zie verder)



De bivector $i \in \mathbb{R}_2^{(2)}$

We maken nu de volgende identificatie:

$$i = e_1 e_2 \Rightarrow i^2 = (e_1 e_2)^2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$$

Dan kunnen we het volgende doen:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - e_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) (-e_1)^2 \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= - \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$



De Clifford-algebra $\mathbb{R}_m$

Het speciale geval $m = 2$:

$$\mathbb{R}^2 = \text{span}(e_1, e_2) \rightarrow \mathbb{R}_2 = \text{Alg}(e_1, e_2)$$

Het algemene geval $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}^m = \text{span}(e_1, \dots, e_m) \rightarrow \mathbb{R}_m = \text{Alg}(e_1, \dots, e_m)$$

$$e_a e_b + e_b e_a = -2\delta_{ab}$$

Kan zelfs voor $\delta_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$ (e.g. andere signatuur, zoals Minkowski)

Geeft echter *geen* velden meer (enkel $\mathbb{C}$, zie volgende slide)

Enkele voorbeelden

- ▶ $\mathbb{R}_1 = \text{Alg}(e_1 : e_1^2 = -1) = \text{span}(1, e_1) \cong \mathbb{C}$
- ▶ $\mathbb{R}_2 = \text{Alg}(e_1, e_2) = \text{span}(1, e_1, e_2, e_{12}) \cong \mathbb{H} = \text{span}(1, i, j, k)$
(algebra der quaternionen, Sir W.R. Hamilton - 1843)
- ▶ Algemeen: reële algebra's $\mathbb{R}_{p,q}$ van dimensie 2^{p+q}
(classificatie: Bott-periodiciteit modulo 8)

	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
0								R									
1								R²		C							
2							$M_2(\mathbb{R})$		$M_2(\mathbb{R})$		H						
3						$M_2(\mathbb{C})$		$M_2^2(\mathbb{R})$		$M_2(\mathbb{C})$		H²					
4					$M_2(\mathbb{H})$		$M_4(\mathbb{R})$		$M_4(\mathbb{R})$		$M_2(\mathbb{H})$		$M_2(\mathbb{H})$				
5				$M_2^2(\mathbb{H})$		$M_4(\mathbb{C})$		$M_4^2(\mathbb{R})$		$M_4(\mathbb{C})$		$M_2^2(\mathbb{H})$		$M_4(\mathbb{C})$			
6			$M_4(\mathbb{H})$		$M_4(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{R})$		$M_8(\mathbb{R})$		$M_4(\mathbb{H})$		$M_4(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{R})$		
7		$M_8(\mathbb{C})$		$M_4^2(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{C})$		$M_8^2(\mathbb{R})$		$M_8(\mathbb{C})$		$M_4^2(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{C})$		$M_8^2(\mathbb{R})$	
8	$M_{16}(\mathbb{R})$		$M_8(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{H})$		$M_{16}(\mathbb{R})$		$M_{16}(\mathbb{R})$		$M_8(\mathbb{H})$		$M_8(\mathbb{H})$		$M_{16}(\mathbb{R})$		$M_{16}(\mathbb{R})$



William Kingdon Clifford (1845 - 1879)





- ▶ Zoon van zijn ouders
- ▶ Vader van de “geometric algebra”
(unificatie van inwendig en uitwendig product)
- ▶ Grootvader van de relativiteit:
 - ▶ *“Like Riemann, he anticipated the geometric ideas of relativity”*
(Hermann Weyl, 1923)
 - ▶ *“Bolder even than Riemann, he confessed his belief that matter is a manifestation of curvature in a space-time manifold”*
(Erik Temple Bell, 1940)



Geometrische algebra: product van vectoren

De *gelijkenis* tussen Grassmann en Clifford product:

$$e_a \wedge e_b = -e_b \wedge e_a \sim e_a e_b = -e_b e_a \quad (a \neq b)$$

Het *verschil* tussen Grassmann en Clifford product:

$$e_a \wedge e_a = 0 \iff e_a^2 = -1$$

Algemeen geldt het volgende ($v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$):

$$v_1 v_2 = -\langle v_1, v_2 \rangle + v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{R}_m^{(0)} \oplus \mathbb{R}_m^{(2)}$$

Toepassingen: robotica, neurale netwerken, *computer graphics*, ...



Definition (Euclidische versie)

De Dirac-operator op $\mathbb{R}^m$ wordt gegeven door

$$\partial_x := e_1 \partial_{x_1} + \dots + e_m \partial_{x_m} ,$$

en voldoet aan de relatie $\partial_x^2 = -\Delta_m$.

harmonische analyse in $\mathbb{R}^2$	$\longrightarrow$	complexe analyse in $\mathbb{R}^2$
$\Delta_2 f(x, y) = 0$		$\partial_z^c f(x, y) = 0$
$\downarrow$		$\downarrow$
harmonische analyse in $\mathbb{R}^m$	$\longrightarrow$	Clifford-analyse in $\mathbb{R}^m$
$\Delta_m f(x_1, \dots, x_m) = 0$		$\partial_x f(x_1, \dots, x_m) = 0$

Voorbeeld: het Riesz-systeem

Stel dat $f(\underline{x})$ op $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ waarden aanneemt in $\mathbb{R}_m^{(1)}$:

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^m f_j(\underline{x}) \mathbf{e}_j \mapsto \partial_x f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \partial_{x_i} f_j(\underline{x}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}_m^{(0)} \oplus \mathbb{R}_m^{(2)}$$

Projectie op scalair deel:

$$i = j \Rightarrow \sum_{j=1}^m \partial_{x_j} f_j \mathbf{e}_j^2 = 0 = -\text{div}[f(\underline{x})]$$

Projectie op bivector-deel:

$$i \neq j \Rightarrow \sum_{i < j} (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) \mathbf{e}_{ij} = 0 = \text{rot}[f(\underline{x})]$$

Conclusie: we vinden het rotor-divergentie-systeem in $\mathbb{R}^m$ terug

Vraag: zijn er andere interessante 'subsystemen'?

- Om te beginnen voeren we de *complexe* Clifford-algebra in:

$$\mathbb{C}_m := \text{Alg}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_m) = \mathbb{R}_m \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Basis: $\{1; e_1, \dots, e_m; e_1 e_2, \dots, e_{m-1} e_m; \dots; e_1 e_2 \dots e_m\}$

- Vervolgens keren we even terug naar $m = 2$:

$$\mathbb{C}_2 = \text{Alg}_{\mathbb{C}}(e_1, e_2) = \text{span}_{\mathbb{C}}(1, e_1, e_2, e_{12}) \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

- Expliciet isomorfisme $\varphi : \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ via de *Witt basis*:

$$(e_1, e_2) \mapsto (f_1, f_1^\dagger) := \left(\frac{e_1 - ie_2}{2}, -\frac{e_1 + ie_2}{2} \right)$$

met algebraïsche relaties: $f_1^2 = (f_1^\dagger)^2 = 0$ en $f_1 f_1^\dagger + f_1^\dagger f_1 = 1$

$$\varphi : (f_1, f_1^\dagger) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- de Dirac-operator kan dan herschreven worden:

$$\partial_x = (f_1 - f_1^\dagger)\partial_{x_1} + i(f_1 + f_1^\dagger)\partial_{x_2}$$

- bovenstaande operator gedraagt zich als volgt:

$$\partial_x \in \text{Alg}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \otimes \mathbb{C}^{2 \times 2} \cong \text{Alg}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^2)$$

- werkt dus eigenlijk in op functies met waarden in $\mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \cong \underbrace{\mathbb{C}^{2 \times 2}}_{\text{idempotent}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- merk hierbij op dat we de *idempotent* in $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ gebruikten:

$$(f_1 f_1^\dagger)^2 = f_1 f_1^\dagger \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



De Dirac-vergelijking als spinor-vergelijking

- ▶ voor het gemak kiezen we even $m = 2n$ (oneven geval vrij analoog)
- ▶ in de algebra $\mathbb{C}_m$ kiezen we de Witt basis $(f_j, f_j^\dagger)_{j=1}^n$

$$\boxed{f_j^2 = (f_j^\dagger)^2 = 0} \quad \text{en} \quad \boxed{f_j f_k^\dagger + f_k^\dagger f_j = \delta_{jk}}$$

- ▶ we zoeken een (maximale) idempotent $I = I^2 \in \mathbb{C}_m$:

$$I := I_1 I_2 \dots I_n = (f_1 f_1^\dagger)(f_2 f_2^\dagger) \dots (f_n f_n^\dagger) \in \mathbb{C}_m$$

- ▶ we hebben dan de identificatie

$$\boxed{\mathbb{C}_{2n} \cong \mathbb{C}^{2^n \times 2^n} \cong \text{End}(\mathbb{C}^{2^n}) \cong \text{End}(\mathbb{C}_m I)}$$



Definition (Euclidische versie)

Indien $m = 2n$, dan definieert men de **Dirac-spinoren** als

$$\mathbb{S} := \mathbb{C}_n / \cong \mathbb{C}^{2^n}.$$

De canonische $\mathbb{Z}_2$ -gradering leidt dan tot de **Weyl-spinoren**:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^- \quad \text{met} \quad \mathbb{S}^\pm := \mathbb{C}_n^\pm / \cong \mathbb{C}^{2^{n-1}}.$$

Bijvoorbeeld: voor $m = 4$ bekomt men

$$\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^- = \text{span}_{\mathbb{C}}(I, f_1^\dagger f_2^\dagger I) \oplus \text{span}_{\mathbb{C}}(f_1^\dagger I, f_2^\dagger I)$$

- ▶ de Dirac-operator werkt dan als volgt ($\underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$):

$$\partial_x : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}^\pm) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}^\mp) : \psi(\underline{x}) \mapsto \partial_x \psi(\underline{x})$$

- ▶ voor **massaloze** fermionen beschouwt men Weyl-spinoren:

$$\partial_x \psi_\pm = 0$$

Geeft dus een gekoppeld systeem differentiaalvergelijkingen!

- ▶ voor **massieve** fermionen heeft men Dirac-spinoren nodig:

$$\partial_x (\psi_+ + \psi_-) = m(\psi_+ + \psi_-) \iff \partial_x \psi_\pm = m\psi_\mp$$

Uiteraard ook hier (maar dan een niet-homogeen stelsel)



Dirac-operatoren in de wiskunde

- ▶ Clifford-analyse als uitbreiding van complexe analyse (Delanghe - Brackx - Sommen)
- ▶ Dirac-operator als conform invariante differentiaaloperator
- ▶ de Atiyah-Singer-Dirac operator op spinbundels ('spin geometry')
- ▶ Dirac-operatoren in representatietheorie ('discrete series analysis')
- ▶ Kostants cubische Dirac-operator
- ▶ uitbreidingen naar hogere spin



Zoek de 7 verschillen



Clifford-product op bivectoren

- De vermenigvuldiging van Clifford-getallen voldoet aan ($a \geq b$)

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_m^{(a)} \times \mathbb{C}_m^{(b)} \Rightarrow \alpha\beta \in \bigoplus_{j=0}^b \mathbb{C}_m^{(a-b+2j)}$$

Denk aan vectoren: $\mathbb{C}_m^{(1)}\mathbb{C}_m^{(1)} = \mathbb{C}_m^{(0)} \oplus \mathbb{C}_m^{(2)}$ ('inner and outer part')

- Speciaal geval: product van bivectoren

$$\mathbb{C}_m^{(2)}\mathbb{C}_m^{(2)} = \mathbb{C}_m^{(0)} \oplus \mathbb{C}_m^{(2)} \oplus \mathbb{C}_m^{(4)} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}_m^{(2)}$$

- Projectie π kan eenvoudig neergeschreven worden:

$$(e_1 e_2)(e_1 e_3) = e_2 e_3 = \frac{1}{2}[e_1 e_2, e_1 e_3] = \frac{1}{2}((e_1 e_2)(e_1 e_3) - (e_1 e_3)(e_1 e_2))$$

Lie algebra's voor dummies

Een Lie algebra is vectorruimte $\mathfrak{g}$ met een bewerking

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

die voldoet aan:

- ▶ $[X, Y] + [Y, X] = 0$ (anti-symmetrisch)
- ▶ $[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]$ (bilineair)
- ▶ $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi-identiteit)

Voorbeeld: $(\mathbb{R}^3, \times)$ met $[u, v] := u \times w \in \mathbb{R}^3$

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$

Komen voor als *raakruimten in de eenheid* van een Lie-groep
(zie cursus: *differentiaalmeetkunde* en *representatietheorie*)

Bouwsteen voor invariantie in de theoretische fysica



Raakruimte en exponentiële afbeelding

- Denk aan de unitaire Lie groep $U(1)$:

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = \bar{z}z = 1\} \cong S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

- De raakruimte aan S^1 in $1 \in U(1)$ is de raaklijn $(x, y) = (1, it)$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1) = T_1 U(1) \cong i\mathbb{R}$$

- Er bestaat een afbeelding $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$

$$\exp(it) := e^{it} \in U(1)$$

De orthogonale Lie algebra

Definition

Onder het product gedefinieerd als

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}_m^{(2)} \times \mathbb{C}_m^{(2)} \rightarrow \mathbb{C}_m^{(2)} : (B_1, B_2) \mapsto [B_1, B_2] := B_1 B_2 - B_2 B_1$$

wordt $\mathbb{C}_m^{(2)}$ een complexe Lie algebra.

Merk op dat

$$\dim \mathbb{C}_m^{(2)} = \dim_{\mathbb{C}} \{M \in \mathbb{C}^{m \times m} : M + M^T = 0\} = \binom{m}{2}.$$

Dat is uiteraard geen toeval[†]:

$$\mathbb{C}_m^{(2)} \cong \mathfrak{so}(m) \cong T_1(SO(m))$$

Dit suggereert dus het volgende:

$$\exp : \mathfrak{so}(m) \rightarrow SO(m) : \theta B \in \mathbb{C}_m^{(2)} \mapsto \exp(\theta B) \in SO(m)$$

[†]Dat zou anders wel toevallig zijn...



Even terug naar de basis...

- ▶ De (complexe) Lie groep

$$SO(m) := \{M \in \mathbb{C}^{m \times m} : MM^T = M^T M = 1\}$$

- ▶ Deze groep heeft een natuurlijke **actie** op vectoren:

$$\mu : SO(m) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^m) : \mu(M)[X] := MX \quad (X \in \mathbb{C}^m)$$

- ▶ Logische vraag: hoe werkt $\mathbb{C}_m^{(2)}$ op vectoren (zie eerdere voetnoot)?

$$\rho_v : \mathbb{C}_m^{(2)} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^m) : B \mapsto \rho_v(B)$$

- ▶ Denk terug aan de **vermenigvuldiging** in $\mathbb{C}_m$:

$$B\left(\sum e_j x_j\right) \in \mathbb{C}_m^{(2)} \mathbb{C}_m^{(1)} = \mathbb{C}_m^{(1)} \oplus \mathbb{C}_m^{(3)} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}_m^{(1)} \cong \mathbb{C}^m$$

De actie ρ_v op vectoren

- Om de projectie uit te voeren gebruiken we opnieuw het haakje:

$$\rho_v(B)[\underline{x}] := \pi(B\underline{x}) = [B, \underline{x}] = B\underline{x} - \underline{x}B \in \mathbb{C}_m^{(1)} \quad (\forall \underline{x} \in \mathbb{C}_m^{(1)})$$

- De vraag is nu: welke actie geeft dit voor de bijhorende groep?

$$\begin{array}{ccc} \exp(\theta B) \in SO(m) & \rightarrow & \rho_v^G(\exp(\theta B))[\underline{x}] := ? \\ \downarrow & & \downarrow \\ \theta B \in \mathbb{C}_m^{(2)} & \rightarrow & \rho_v(\theta B)[\underline{x}] := \theta[B, \underline{x}] \end{array}$$

- Beide acties moeten **compatibel** zijn, en dit gaat als volgt:

$$\rho_v(\theta B)[\underline{x}] := \left. \frac{d}{d\theta} \rho_v^G(\exp(\theta B))[\underline{x}] \right|_{\theta=0}.$$

De actie ρ_v^G op vectoren

- We moeten dus volgende vergelijking 'integreren':

$$\left. \frac{d}{d\theta} \rho_v^G(\exp(\theta B))[\underline{x}] \right|_{\theta=0} = \theta(B\underline{x} - \underline{x}B)$$

- Dat kan enkel als we de **groepsactie** als volgt definiëren:

$$\rho_v^G(\exp(\theta B))[\underline{x}] := \exp(\theta B)\underline{x}\exp(-\theta B)$$

- We werken een voorbeeld uit:

$$\exp(\theta e_1 e_2) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta e_{12})^k}{k!} = \cos \theta + e_{12} \sin \theta$$

- De actie zelf op vectoren wordt dan:

$$\underline{x} := x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto (\cos \theta + e_{12} \sin \theta) \underline{x} (\cos \theta - e_{12} \sin \theta)$$

Verrassende conclusie!

- Indien we dat verder uitwerken (product in $\mathbb{C}_m$ berekenen):

$$\underline{x} \cong \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Let dus op de **dubbele hoek**!

- Bovendien geldt er ook dat

$$\rho_v^G(+\exp(\theta B))[\underline{x}] = \rho_v^G(-\exp(\theta B))[\underline{x}]$$

- Samen wil dat het volgende zeggen:

$$SO(m) \cong \exp(\mathbb{C}_m^{(2)})/\mathbb{Z}_2$$

In tegenstelling tot wat we *dachten*, geldt er dus:

$$\exp : \mathbb{C}_m^{(2)} \rightarrow \text{Spin}(m) \neq SO(m)$$



De spingroep

- ▶ “de spingroep bevat wortels van rotaties”
(dixit Jan met de Pet)
- ▶ “ $\text{Spin}(m)$ is een dubbele bedekking voor $\text{SO}(m)$ ”
(dixit Jan met de SAC)
- ▶ de spingroep heeft een actie op de spinoren

$$\rho_s^G : \text{Spin}(m) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{S}^\pm) : \rho_s^G(\sigma)[\psi_\pm] := \sigma\psi_\pm .$$

Verklaring: $\exp(\theta B) \in \mathbb{C}_m^+$ en $\mathbb{C}_m^+(\mathbb{C}_m^\pm I) \subset \mathbb{C}_m^\pm I = \mathbb{S}^\pm$

- ▶ de afgeleide daarvan is uiteraard een actie van $\mathfrak{so}(m)$:
$$\rho_s : \mathfrak{so}(m) \rightarrow \text{End}(\mathbb{S}^\pm) : \rho_s(B)[\psi_\pm] := B\psi_\pm .$$

Spinoren en spin-quantumgetallen

- We nemen even het speciale geval $m = 4$

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathbb{C}_4^{(2)} = \text{Alg}_{\mathbb{C}}(e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34})$$

Voor de kenners: $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ is *niet* simpel

- Beter om lichtjes anders te normeren:

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_+ \\ &= \text{span}(Y_1, Y_2) \oplus \text{Alg}(H_1, H_2) \oplus \text{span}(X_1, X_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{p}_+ &= \text{span}(f_1^\dagger f_2^\dagger, f_1^\dagger f_2) \oplus \text{span}(f_1 f_2, f_1 f_2^\dagger) \\ \mathfrak{h} &= \text{Alg}\left(f_1 f_1^\dagger - \frac{1}{2}, f_2 f_2^\dagger - \frac{1}{2}\right) = \text{Alg}\left(-\frac{i}{2}e_{12}, -\frac{i}{2}e_{34}\right)\end{aligned}$$

- De algebra $\mathfrak{h}$ is *abels* en *maximaal* (Cartan algebra)
 $\Rightarrow H_1$ en H_2 kunnen *tegelijkertijd* gediagonaliseerd worden

Voorbeeld 1: vectorrepresentatie $\mathbb{C}^4$

- We bekijken enkel de actie van $\mathfrak{h}$ op $\mathbb{C}^4$:

$$\rho_v : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^4) : \rho_v[H_j](\underline{v}) := [H_j, \underline{v}] \in \mathbb{C}_4^{(1)}$$

- Als basis voor $\mathbb{C}^4$ kiezen we de Witt basis: $(f_1, f_2; f_1^\dagger, f_2^\dagger)$
- Eigenwaarden voor $\mathfrak{h}$ zijn *koppels* getallen:

$$\begin{array}{ll} f_1 & \rightarrow (+1, 0) \\ f_1^\dagger & \rightarrow (-1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_2 & \rightarrow (0, +1) \\ f_2^\dagger & \rightarrow (0, -1) \end{array}$$

- Bij wijze van voorbeeld:

$$\rho_v[H_1](f_1) = [f_1 f_1^\dagger, f_1] = f_1 f_1^\dagger f_1 - f_1^2 f_1^\dagger = f_1(f_1 f_1^\dagger + f_1^\dagger f_1) = f_1$$

- Koppels eigenwaarden kan men *lexicografisch* ordenen
- Vectorrepresentatie heeft **spingetallen** $(1, 0)$

Voorbeeld 2: spinorrepresentatie $\mathbb{S}^\pm$

- We bekijken enkel de actie van $\mathfrak{h}$ op $\mathbb{S}^\pm$:

$$\rho_s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathbb{S}^\pm) : \rho_s[H_j](\psi_\pm) := H_j \psi_\pm \in \mathbb{S}^\pm$$

- Zie eerder: $\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^- = \text{span}(I, f_1^\dagger f_2^\dagger I) \oplus \text{span}(f_1^\dagger I, f_2^\dagger I)$
- Eigenwaarden voor $\mathfrak{h}$ zijn *koppels* getallen:

$$\begin{array}{ll} I & \rightarrow \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \\ f_1^\dagger I & \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_1^\dagger f_2^\dagger I & \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ f_2^\dagger I & \rightarrow \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

- Bij wijze van voorbeeld:

$$\rho_s[H_1](f_1^\dagger I) = \left(f_1 f_1^\dagger - \frac{1}{2}\right) f_1^\dagger I = -\frac{1}{2} f_1^\dagger I$$

- Koppels eigenwaarden kan men *lexicografisch* ordenen
- Spinorrepresentatie heeft **spingetallen** $\left(+\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$

Enkele wiskundige reflexen

- Kunnen we dit doen in **meerdere dimensies**?

Ja: $\mathfrak{so}(m)$ met $m \in \{2n, 2n+1\} \Rightarrow \mathfrak{h}$ -eigenwaarden $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
(mits voorwaarden halftallig-geheeltallig)

- Bestaan er **modellen** voor de representaties?

Ja: tensoren (+ Young-diagrammen) of polynomiale modellen

$$\begin{aligned}(k, 0, \dots, 0) &\sim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \cap \ker \Delta_m \\ \left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) &\sim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}) \cap \ker \partial_x\end{aligned}$$

- Gegeven 2 representaties $\mathbb{V}_\lambda$ en $\mathbb{V}_\mu$, bestaat er dan een operator

$$\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^{(n)} : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{V}_\lambda) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{V}_\mu)$$

Ja/Neen: classificatie van conform invariante operatoren

Enkele fysisch geïnspireerde voorbeelden

Notatie-afspraken:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)' := \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}, \lambda_2 + \frac{1}{2}, \dots, \lambda_k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$$

λ	μ	operator	belang
$(0, 0, \dots, 0)$	$(0, 0, \dots, 0)$	Δ_m	Klein-Gordon
$(k, 0, \dots, 0)$	$(k, 0, \dots, 0)$	$\mathcal{D}_k$	Maxwell ($k = 1$)
$(0, 0, \dots, 0)'$	$(0, 0, \dots, 0)'$	∂_x	Dirac
$(k, 0, \dots, 0)'$	$(k, 0, \dots, 0)'$	$\mathcal{R}_k$	Rarita-Schwinger ($k = 1$)
$(k, 0, \dots, 0)'$	$(k \pm 1, 0, \dots, 0)'$	$\mathcal{T}_k^\pm$	(dual) Twistor
$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)'$	$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)'$	$\mathcal{Q}_\lambda$	HSD



Wat bestudeert men voor die operatoren?

- ▶ de kern + ontbinding als representatie voor de spingroep
- ▶ integraalvoorstellingen (Cauchy - Stokes - Borel)
- ▶ geassocieerde integraaltransformaties (Fourier - Radon - wavelet)
- ▶ duale operator-algebra's (Howe-dualiteiten)
- ▶ speciale functies en bijhorende representatietheorie
- ▶ discretisatie + numerieke implementaties
- ▶ extensies op manifolds
- ▶ symmetrie-reducties $SO(4m) - U(2m) - Sp(m)$

Duale symmetrie en de Laplace-operator

- ▶ Via relaties in $\mathbb{R}_m$ vinden we: $\partial_x^2 = -\Delta_x$ en $\underline{x}^2 = -|\underline{x}|^2$
- ▶ Men gaat vrij eenvoudig na dat

$$\text{Alg} \left(\frac{1}{2} \Delta_x, \frac{1}{2} |\underline{x}|^2, \sum x_j \partial_{x_j} + \frac{m}{2} \right) \cong \mathfrak{sl}(2) = \text{Alg}(X, Y, H)$$

met definiërende relaties

$$[X, Y] = H \quad [H, X] = +2X \quad [H, Y] = -2Y$$

- ▶ Alternatieve representatie voor de matrix Lie-algebra

$$\mathfrak{sl}(2) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- ▶ Invariante operatoren spannen dus *zelf* nog een Lie algebra op
- ▶ Toepassing: multipliciteiten-vrije ontbinding van $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$

Factorisatie op niveau van duale symmetrie

- ▶ Harmonische analyse: Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$
- ▶ Clifford-analyse: verfijning van harmonische analyse
(wortel van operator - dubbele bedekking voor groep)
- ▶ Is dat ook duaal algebraïsch duidelijk?
- ▶ **Jazeker!** Theorie van de orthosymplectische Lie superalgebra

$$\text{SuperAlg}(x, \partial_x) = \mathfrak{osp}(1, 2) = \mathfrak{osp}_0(1, 2) \oplus \mathfrak{osp}_1(1, 2)$$

- ▶ Verfijning van de duale representatietheorie
- ▶ Duale algebra voor algemene invariante operatoren?
PhD in progress (Raeymaekers - Roels)



Ligt de buurman luidkeels te snurken,
't is tijd om een pintje te ontkurken.
(Eelbode, Spreekwoord 4)

Selected references

- ▶ Dirac P.A.M., *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. Roy. Soc. **A 117** (1928) 610-24.
- ▶ Rarita W., Schwinger J., *On a theory of particles with half-integer spin*, Phys. Rev. **60** (1941) 61.
- ▶ Fulton T., Rohrlich F., Witten L., *Conformal invariance in physics*, Rev. Mod. Phys. **34** Vol. 3 (1962) 442-456.
- ▶ Stein E.W., Weiss G., *Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representations of the rotation group*, Amer. J. Math. **90** (1968) 163-196.
- ▶ Bernstein I.N., Gelfand I.M., Gelfand S.I., *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$ -modules*, in 'Lie groups and their representations' (ed. Gelfand I.M. - 1975), 21-64.
- ▶ Fegan H.D., *Conformally invariant first order differential operators*, Quart. J. Math. **27** (1976) 513-38.
- ▶ Branson T., *Second order conformal covariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998) 1031-1042.
- ▶ Delanghe R., Sommen F., Souček V., *Clifford analysis and spinor valued functions* (1992).
- ▶ Gilbert J., Murray M., *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis* (1991).