Bewijzen voor de AM-GM-ongelijkheid

PRIME

Een beroemde olympiadeongelijkheid is de ongelijkheid tussen het rekenkundig gemiddelde (AM, *arithmetic mean*) en het meetkundig gemiddelde (GM, *geometric mean*). Voor een gegeven aantal getallen* (zegge n) definieert men het rekenkundig gemiddelde als de som van deze getallen, gedeeld door n. Het minder bekende meetkundig gemiddelde is de n^{de}-machtswortel uit het product van deze getallen.

$$\mathsf{AM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad \text{en} \qquad \mathsf{GM}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i}$$

De ongelijkheid die we willen bewijzen, stelt dat voor eender welke collectie getalllen x_i steeds geldt dat $\mathsf{AM} \geq \mathsf{GM}$; bovendien treedt gelijkheid op als en slechts als alle x_i's gelijk zijn.

Inhoudsopgave

*Tenzij anders vermeld, staat in deze tekst “getallen” voor positieve reële getallen. We zullen ook vaak de argumenten van AM en GM, die strikt genomen functies zijn, achterwege laten voor de beknoptheid, als duidelijk is van welke getallen deze gemiddelden beschouwd worden.

1 Voor twee getallen

1.1 Herleiden naar een kwadraat

Herschrijf $\mathsf{AM}(x,y) - \mathsf{GM}(x,y)$ naar een kwadraat:

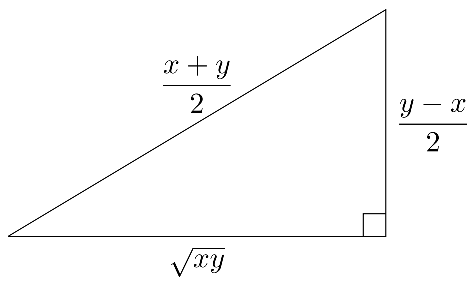
$$\mathsf{AM}(x,y) - \mathsf{GM}(x,y) = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$

Omdat een reëel kwadraat steeds positief is, blijkt $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Gelijkheid treedt op als en slechts als $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 0$, d.w.z. als en slechts als $x = y$. ■

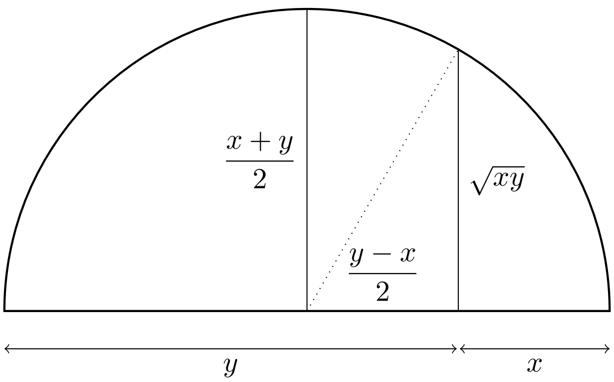
1.2 Stelling van Pythagoras

De stelling van Pythagoras garandeert dat voor positieve x en y, met $x \leq y$, de volgende waarden de zijdelengtes van een rechthoekige driehoek vormen:



Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat de lengte van de hypotenusa (hier AM) groter is dan de lengtes van de rechthoekszijden (waarvan GM er een van is). Gelijkheid treedt pas op bij een gedegenereerde driehoek, als de overige zijde lengte 0 heeft, waarbij dus $x = y$.

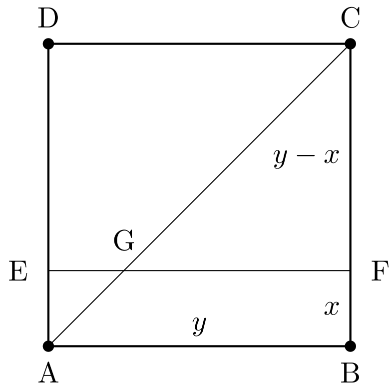
Alternatieve voorstelling:



■

1.3 Meetkundig

Veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat $x \leq y$.



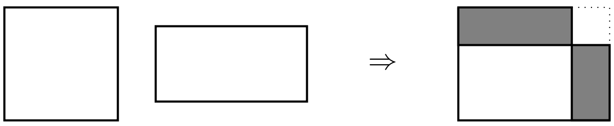
ABCD is een vierkant met zijdelengte y, en ABFE een rechthoek met zijden x en y. Dan is duidelijk:

$$xy = \mathrm{opp(ABFE)} = \mathrm{opp(AGE)} + \mathrm{opp(ABFG)} \leq \mathrm{opp(AGE)} + \mathrm{opp(ABC)} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Omdat kennelijk $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, is ook $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$ (vervang x en y door hun vierkantswortels). Alweer treedt gelijkheid op als en slechts als $y - x = 0$, d.w.z. als en slechts als $x = y$. ■

1.4 Isoperimetrisch probleem

We beginnen met een algemener geometrisch lemma: we zullen bewijzen dat van alle rechthoeken met een vaste omtrek, het vierkant diegene is met de maximale oppervlakte. Beschouw dus een rechthoek en een vierkant met dezelfde omtrek, en leg deze als volgt over elkaar:



Omdat de bovenste grijze rechthoek (het deel van het vierkant dat uitsteekt) even groot is als de grijze rechthoek rechts en het gestippelde vierkant samen, is duidelijk dat de oppervlakte van het vierkant groter is dan dat van de rechthoek (namelijk de oppervlakte van het gestippelde vierkant). De rechthoek met de grootste oppervlakte voor een gegeven omtrek is dus inderdaad een vierkant.

Beschouw nu een rechthoek met zijden van lengte x en y. Diens omtrek is $2(x + y)$, oppervlakte xy. Het vierkant met dezelfde omtrek heeft dus zijdelengte $\frac{1}{2}(x + y)$, en oppervlakte $\frac{1}{4}(x + y)^2$. Uit de observatie in de vorige paragraaf besluiten we:

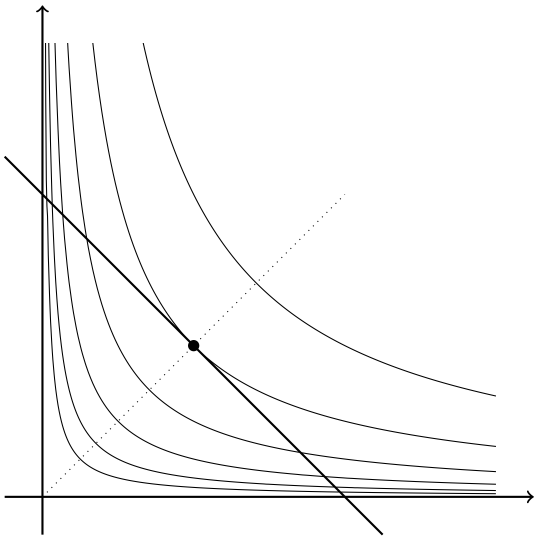
$$\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

Gelijkheid als en slechts als de initiële rechthoek in feite al een vierkant was, dus als en slechts als $x = y$. AM-GM volgt nu gemakkelijk.

Opmerking: een veralgemening naar n dimensies geeft een bewijsstrategie voor de algemene AM-GM-ongelijkheid. De n-dimensionale hyperkubus heeft namelijk het kleinste volume van alle hyperbalken met dezelfde totale ribbelengte. ■

1.5 Hyperbolen

We beschouwen de familie hyperbolen met vergelijking $xy = c$ (parameter c). Als een rechte $x+y = 2m$ zo'n hyperbool snijdt, gebeurt dat in ofwel twee punten ofwel in één raakpunt.



Veronderstel dat de rechte $x+y = 2m$ raakt aan de hyperbool $xy = c$. Door symmetrie rond de rechte $x = y$ is het raakpunt makkelijk te bepalen: (m, m). In dit geval dus blijkt dat $c = m^2$, en hebben we:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Elk andere punt op de rechte met positieve coördinaten ligt op precies één van de hyperbolen $xy = c$, waarbij dan $c < m^2$. Dit betekent in dat geval:

$$xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

AM-GM is dus bewezen voor alle punten op de rechte $x + y = 2m$ in het eerste kwadrant. Omdat m willekeurig was, geldt AM-GM voor alle positieve x en y (met gelijkheid precies als $x = y$). ■

---

2 Voor n getallen

2.1 Exponentieel

Definieer $f(x) = \exp(x-1) - x$. Diens eerste afgeleide is $f'(x) = \exp(x-1) - 1$, en de tweede afgeleide $f''(x) = \exp(x-1)$. Omdat $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle x-waarden, is f een strikt convexe functie met absoluut minimum op $x = 1$. Dus $x \leq \exp(x-1)$ voor alle reële x-waarden, met gelijkheid alleen voor $x = 1$.

Beschouw nu een lijst van n niet-negatieve getallen $x_1, \ldots, x_n$. Indien allen identiek nul zijn, gaat AM-GM op (met gelijkheid). In het andere geval is het rekenkundig gemiddelde α strikt groter dan nul, en kunnen we bovenstaande ongelijkheid een aantal maal toepassen:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{\alpha} \ldots \frac{x_n}{\alpha} &\leq \exp\left(\frac{x_1}{\alpha} - 1\right) \exp\left(\frac{x_2}{\alpha} - 1\right) \ldots \exp\left(\frac{x_n}{\alpha} - 1\right) \\
&= \exp\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\alpha} - n\right) \\
&= \exp(n - n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Zo te zien is $\dfrac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}{\alpha^n} \leq 1$, ofwel $\mathsf{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \leq \alpha = \mathsf{AM}$. ■

2.2 Inductie en functieonderzoek

Veronderstel dat AM-GM geldt voor $n-1$ getallen, en beschouw een n-tal $(a_1, \ldots, a_n)$. We mogen veronderstellen dat alle $a_i > 0$ (anders is de stelling triviaal). We definiëren de volgende functie:

$$f(x) = \mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) - \mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{n} - (a_1 \ldots a_{n-1} \cdot x)^{\frac{1}{n}}$$

We moeten dan bewijzen dat $f(x) \geq 0$ voor alle strikt positieve x.

We berekenen de afgeleide van f:

$$f'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}(a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{n-1}{n}}$$

Om de extrema van f te zoeken, bepalen we wanneer de afgeleide nul is:

$$\begin{aligned}
& f'(x_0) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} x_0^{-\frac{n-1}{n}} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x_0 = (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = \mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_{n-1})
\end{aligned}$$

Omdat $f''(x) > 0$ als $x > 0$, bereikt f een (globaal) minimum in x_0. De waarde van dit minimum is

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{n} - (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n(n-1)}} \\
&= \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n} + \frac{1}{n}(a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} - (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}(a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} - (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

wegens de inductiehypothese.

We moeten nu enkel nog nagaan wanneer gelijkheid optreedt. Opnieuw wegens de inductiehypothese zal $f(x_0) = 0$ als en slechts als $a_1 = \ldots = a_{n-1}$, en in dat geval is ook $x_0 = a_1 = \ldots$. We krijgen dus inderdaad gelijkheid precies als alle a_i gelijk zijn. ■

2.3 Ongelijkheid van Jensen

Voor een convexe functie φ, waarden x_i in haar domein en gewichten a_i, stelt Jensens ongelijkheid:

$$\varphi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \leq \frac{\sum a_i \varphi(x_i)}{\sum a_i}$$

Omgekeerd, voor een concave functie φ geldt de omgekeerde ongelijkheid:

$$\varphi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \geq \frac{\sum a_i \varphi(x_i)}{\sum a_i}$$

De ongelijkheid van Jensen wordt besproken in de cursus Wiskundige Statistiek in de tweede bachelor over algemene maatruimten (hierboven staat het discrete geval). De logaritme is een concave functie, dus samen met de keuze $a_i = 1$ krijgen we:

$$\ln\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum \ln(x_i)}{n}$$

Vervolgens laten we op beide leden de exponentiële inwerken, die stijgend is en de ongelijkheid bewaart.

$$\exp\left(\ln\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\right) \geq \exp\left(\frac{\sum \ln(x_i)}{n}\right)$$

Na wat uitwerken volgt:

$$\mathsf{AM} = \frac{\sum x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\exp(\sum \ln x_i)} = \sqrt[n]{\prod \exp(\ln x_i)} = \sqrt[n]{\prod x_i} = \mathsf{GM}$$

■

2.4 Extremumstelling van Weierstrass

Kies M willekeurig en definieer V als de verzameling van alle n-tallen $(x_1, \ldots, x_n)$ met de eigenschap dat $\mathsf{AM}(x_1, \ldots, x_n) = M$. We moeten bewijzen dat voor elk n-tal in V geldt dat $\mathsf{GM}(x_1, \ldots, x_n) \leq M$, met gelijkheid als en slechts als alle x_i gelijk.

V is een compacte verzameling (want gesloten en begrensd) en $\mathsf{GM}(x_1, \ldots, x_n)$ is een continue functie. Uit de extremumstelling van Weierstrass volgt dan dat $\mathsf{GM}(x_1, \ldots, x_n)$ op V een maximum bereikt.

Beschouw nu eens een niet-constant n-tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in V, en veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat $a_1 \neq a_2$. Dan zit $(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots, a_n)$ ook in V. Uit AM-GM voor twee getallen volgt nu dat $a_1 a_2 < (\frac{a_1+a_2}{2})^2$, waaruit $\mathsf{GM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) < \mathsf{GM}(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots, a_n)$. Dus $\mathsf{GM}(x_1, \ldots, x_n)$ bereikt haar maximum niet in $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dan blijft er nog maar één n-tal in V over waarin $\mathsf{GM}(x_1, \ldots, x_n)$ haar maximum kan bereiken, namelijk het constante n-tal $(M, M, \ldots, M)$. Duidelijk is $\mathsf{GM}(M, \ldots, M) = M$, en hiermee is het gestelde bewezen. ■

2.5 Achterwaartse inductie

Dit bewijs maakt gebruik van het voorwaarts-achterwaartse inductieprincipe van Cauchy, een variant op het gekende inductieprincipe. Een gewoon bewijs door inductie gaat als volgt:

1. Bewijs $P(1)$.
2. Bewijs dat $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
3. Concludeer $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een bewijs door voorwaarts-achterwaartse inductie daarentegen gaat als volgt:

1. Bewijs $P(1)$.
2. Bewijs dat $P(n) \Rightarrow P(2n)$.
3. Bewijs dat $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.
4. Concludeer $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Inderdaad, uit stap 2 volgt dat de bewering geldt voor $1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots$ en dus voor willekeurig grote getallen. Uit stap 3 volgt dan dat als de bewering waar is voor een zekere 2^k, hij dan ook waar is voor alle $n \leq 2^k$.

We bewijzen nu AM-GM met inductie op n, het aantal getallen.

1. Voor $n = 1$ is de bewering triviaal.
2. Veronderstel dat AM-GM geldt voor alle n-tallen. Beschouw dan een $2n$-tal $(a_1, \ldots, a_{2n})$. Dan is $\mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_{2n}) = \sqrt{\mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_n)\mathsf{GM}(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})} \leq \sqrt{\mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_n)\mathsf{AM}(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})} \leq \frac{1}{2}\mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_n) + \frac{1}{2}\mathsf{AM}(a_{n+1}, \ldots, a_{2n}) = \mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_{2n})$, waarbij we achtereenvolgens de inductiehypothese en het geval $n = 2$ hebben toegepast.
3. Veronderstel dat AM-GM geldt voor alle n-tallen. Beschouw dan een $(n-1)$-tal $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Noteer $A = \mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_{n-1})$. We passen de inductiehypothese toe op het n-tal $(a_1, \ldots, a_{n-1}, A)$ en verkrijgen dat $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_{n-1} + A) \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1} \cdot A}$. Merk op dat we het linkerlid kunnen vereenvoudigen tot $\frac{1}{n}((n-1) \cdot A + A) = A$. We vinden dus dat $A^n \geq a_1 \ldots a_{n-1} \cdot A$, oftewel:
$$\mathsf{AM}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = A \geq \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}} = \mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_{n-1})$$
4. We mogen nu concluderen dat AM-GM geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

■

2.6 Rechtstreekse inductie

We bewijzen eerst een sterkere vorm van de AM-GM-ongelijkheid voor het geval $n = 2$, voor $0 < a \leq b$.

$$a \leq x \leq b \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)(x-b) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b \geq x + \frac{ab}{x}$$

De middenste vergelijking geeft aan dat gelijkheid opgaat als en slechts als $x = a$ of $x = b$. Omdat $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ voor alle positieve a en b, geeft de keuze $x = \sqrt{ab}$ dat $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, wat AM-GM voor twee getallen bewijst.

Het algemene geval gaan we met inductie aantonen. Als $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, is het te bewijzen duidelijk voldaan. Veronderstel dus het tegendeel en herschik de x_i's desnoods zodat x_1 en x_2 respectievelijk de kleinste en grootste van de x_i's worden. Noteer het meetkundig gemiddelde van de x_i's als g, zodat $x_1 x_2 \ldots x_n = g^n$. Er volgt dat $x_1 < g < x_2$ (strikte ongelijkheden!). Uit de vorige paragraaf halen we dat $x_1 + x_2 > g + \frac{1}{g}(x_1 \cdot x_2)$, dus:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > g + \frac{x_1 \cdot x_2}{g} + x_3 + \ldots + x_n$$

We passen nu de inductiehypothese toe op de $n-1$ laatste termen in het rechterlid. Bemerk dat het product $\frac{1}{g}(x_1 \cdot x_2)x_3 \ldots x_n$ net gelijk is aan g^{n-1}, zodat het meetkundig gemiddelde van deze termen precies gelijk is aan g. De som van de termen is gelijk aan $(n-1)$ maal hun rekenkundig gemiddelde, dat volgens de inductiehypothese minstens g is. We kunnen besluiten dat de som van de termen groter is dan $(n-1)g$. Dus:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > g + (n-1)g = ng$$

We vinden het te bewijzen resultaat. We hebben eveneens aangetoond dat tenzij alle x_i's gelijk zijn, de strikte gelijkheid geldt; gelijkheid treedt dus enkel op als alle x_i's gelijk zijn. ■

2.7 Reeksontwikkelingen

We voeren eerst een nieuwe notatie in. Als alle coëfficiënten in de reeksontwikkeling van een functie f groter of gelijk zijn aan de corresponderende coëfficiënten in de ontwikkeling van een functie g, zullen we dit als volgt noteren:

$$f \ggg g$$

Beschouw de reeksontwikkelingen van $\exp(xy)$ en $\frac{1}{k!}(xy)^k$ in machten van y. De eerste heeft algemene term $\frac{1}{m!}(xy)^m$, de tweede bevat slechts één niet-triviale term (de functie zelf). Er geldt dus duidelijk (als functies van y, met positieve parameter x):

$$\exp(xy) \ggg \frac{(xy)^k}{k!}$$

Door producten van deze functies te nemen met verschillende x-waarden, volgt dan gauw:

$$\exp\left(y \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ggg \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^k \cdot \frac{y^{nk}}{(k!)^n}$$

Beschouwen we nu in het bijzonder de coëfficiënt bij y^{nk}, dan krijgen we dus:

$$\frac{1}{(nk)!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{nk} \geq \frac{1}{(k!)^n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^k$$

In de uitdrukkingen tussen haakjes herkennen we het rekenkundig en meetkundig gemiddelde al:

$$\frac{(n \cdot \mathsf{AM})^{nk}}{(nk)!} \geq \frac{(\mathsf{GM}^n)^k}{(k!)^n}$$

Herschrijven geeft:

$$\frac{\mathsf{AM}}{\mathsf{GM}} \geq \sqrt[nk]{\frac{(nk)!}{(k!)^n \cdot n^{nk}}} = \frac{1}{n} \sqrt[nk]{\frac{(nk)!}{(k!)^n}}$$

Het rechterlid blijkt een stijgende functie van k met waarden tussen 0 en 1. Om het scherpste resultaat te verkrijgen, beschouwen we de limietovergang $k \to \infty$:

$$\frac{\mathsf{AM}}{\mathsf{GM}} \geq \frac{1}{n} \lim_{k\to\infty} \sqrt[nk]{\frac{(nk)!}{(k!)^n}}$$

De formule van Stirling ($m! \sim \sqrt{2\pi m} \cdot e^{-m} \cdot m^m$) maakt de berekening van de limiet eenvoudiger.

$$\frac{1}{n} \lim_{k\to\infty} \sqrt[nk]{\frac{(nk)!}{(k!)^n}} = \frac{1}{n} \lim_{k\to\infty} \sqrt[nk]{\frac{\sqrt{2\pi nk} \cdot e^{-nk} \cdot (nk)^{nk}}{(\sqrt{2\pi k} \cdot e^{-k} \cdot k^k)^n}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\sqrt[2n]{n}}{2\pi k}} = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{\sqrt[2n]{n}}{2\pi k}\right) \stackrel{\text{H}}{=} 1$$

In de laatste stap werd de regel van de l'Hôpital toegepast. We hebben dus gevonden:

$$\frac{\mathsf{AM}}{\mathsf{GM}} \geq 1$$

■

2.8 Orde-ongelijkheid

De orde-ongelijkheid stelt dat de som $\sum a_i b_i$ gemaximaliseerd wordt als de rijen $\{a_i\}$ en $\{b_i\}$ beiden aflopend of beiden oplopend gesorteerd zijn, en geminimaliseerd als ze tegengesteld gesorteerd zijn, en deze extrema zijn gelijk als en slechts als alle termen gelijk zijn.

Om AM-GM te bewijzen vanuit deze ongelijkheid, definiëren we de volgende waarden:

- $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$
- $a_k = \dfrac{1}{g^k} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} x_i$
- $b_k = \dfrac{1}{a_k}$

Omdat de rijen $\{a_k\}$ en $\{b_k\}$ duidelijk tegengesteld gesorteerd zijn, impliceert de orde-ongelijkheid:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq a_1 b_n + a_2 b_1 + a_3 b_2 + \ldots + a_n b_{n-1}$$

Men rekent eenvoudig na dat de term $a_1 b_n$ gelijk is aan $\frac{x_1}{g}$, en ook elke andere term $a_k b_{k-1}$ aan $\frac{x_k}{g}$. Uit de definitie van b_k volgt ook dat $a_k b_k$ steeds gelijk is aan één, zodat het linkerlid in feite een som van n eentjes is. Dus:

$$n \leq \frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \frac{x_3}{g} + \ldots + \frac{x_n}{g}$$

En dit valt direct te herschrijven tot het gevraagde.

$$\mathsf{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \mathsf{AM}$$

■

2.9 Integralen

Beschouw een n-tupel $\bar{x}$, in niet-dalende volgorde gesorteerd. We zullen de volgende som van integralen uitrekenen; merk alvast op dat elke integraal in deze som positief is, zowel als $x_i \leq \mathsf{GM}$ als $x_i \geq \mathsf{GM}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathsf{GM}}^{x_i} \left(\frac{1}{\mathsf{GM}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

Uit wat elementaire calculus volgt dat deze som gelijk is aan:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{\mathsf{GM}} - \ln t \right) \Bigg|_{\mathsf{GM}}^{x_i}$$

Grenzen invullen:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\mathsf{GM}} - \ln x_i - 1 + \ln \mathsf{GM} \right)$$

De som uitrekenen levert op:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\mathsf{GM}} - \ln(x_1 x_2 \ldots x_n) - n + \ln(\mathsf{GM}^n)$$

We zien het rekenkundig gemiddelde al opduiken.

$$n\frac{\mathsf{AM}}{\mathsf{GM}} - \ln(\mathsf{GM}^n) - n + \ln(\mathsf{GM}^n)$$

De som van integralen, die positief was, blijkt dus niets meer dan de volgende uitdrukking:

$$n \left(\frac{\mathsf{AM}}{\mathsf{GM}} - 1 \right)$$

Omdat n positief is, moet de tweede factor dat ook zijn, en dat is net de AM-GM-ongelijkheid. We zien dat gelijkheid enkel optreedt als de waarden van alle integralen in het begin gelijk waren aan nul, dus als $x_i = \mathsf{GM}$ voor alle indices i, dus precies als alle componenten van $\bar{x}$ gelijk zijn. ■

2.10 Termen swappen

Eerst tonen we een lemma aan. Als $\bar{a}$ en $\bar{b}$ niet-dalende n-tupels zijn met $a_i \leq b_i$ voor alle indices i, dan wordt de uitdrukking $(\sum a_i) \cdot (\sum b_i)$ niet kleiner bij het verwisselen van twee corresponderende termen a_k en b_k. Meer specifiek neemt de waarde toe, tenzij $a_k = b_k$, of $a_i = b_i$ voor alle indices $i \neq k$. Dit volgt uit de volgende uitdrukking (die weliswaar wat prutswerk vereist om aan te tonen):

$$\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i + b_k \right) \cdot \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} b_i + a_k \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) + (b_k - a_k) \cdot \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (b_i - a_i) \right)$$

Inderdaad, de tweede term in het rechterlid blijkt positief, en is enkel gelijk aan nul bij de beschreven situaties. Hiermee tonen we AM-GM aan voor een stijgend n-tupel van getallen x_i, te beginnen met:

$$n^n \cdot \mathsf{GM}(x_1, \ldots x_n)^n = (\underbrace{x_1 + \ldots + x_1}_{n \text{ termen}}) \cdot (\underbrace{x_2 + \ldots + x_2}_{n \text{ termen}}) \cdots (\underbrace{x_n + \ldots + x_n}_{n \text{ termen}})$$

Uit het lemma halen we dan, door termen te swappen:

$$n^n \cdot \mathsf{GM}^n \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_2) \cdots (x_1 + x_n + \ldots + x_n)$$

Door dit voldoende te herhalen bekomen we het volgende resultaat.

$$n^n \cdot \mathsf{GM}^n \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n = (n \cdot \mathsf{AM})^n$$

De gevraagde ongelijkheid is duidelijk. ■

2.11 Lagrangemultiplicator

Voor een lijst van n positieve getallen $(x_1, \ldots, x_n)$ definiëren we de functies $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ en $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$. Veronderstel g constant ($g = c$); dan willen we de maximale waarde van f bepalen onder deze voorwaarde dat $g - c = 0$, en dit doen we via een techniek van Lagrange. Beschouw:

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) &= f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_n) - c\big) \\ &= \sqrt[n]{x_1, \ldots, x_n} + \lambda\big(x_1 + \ldots + x_n - c\big) \end{aligned}$$

λ is een parameter die de Lagrangemultiplicator genoemd wordt. De methode van Lagrange stelt dat een extremum optreedt wanneer de partiële afgeleiden van F (naar elke variabele) gelijk zijn aan nul. Dus we willen volgende differentiaalvergelijkingen simultaan oplossen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Nu geldt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{n x_i} \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \lambda$$

Al deze partiële afgeleiden moeten gelijk zijn aan nul (voor alle indices i), waaruit $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = -\lambda n x_i$. In het bijzonder zien we dat bij een extremum, alle x_i's gelijk zijn aan elkaar. Ook geldt:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + \ldots + x_n - c$$

De conditie dat deze partiële afgeleide nul is, geeft ons concreet dat $x_i = \frac{c}{n}$. Er bestaat dus één extremum, waarin f dan de waarde $f(\frac{c}{n}, \ldots, \frac{c}{n}) = \sqrt[n]{(\frac{c}{n})^n} = \frac{c}{n}$ aanneemt, ofwel precies het rekenkundig gemiddelde van de x_i's. Omdat de functie f geen minimum bereikt (wat kan ingezien worden door x_i voldoende klein te kiezen), is dit extremum een maximum, zodat:

$$\mathsf{GM} = f(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \mathsf{AM}$$

Gelijkheid treedt slechts op in het maximum zelf, waar alle x_i gelijk zijn. ■

2.12 Eigenwaarden

We gebruiken het volgende resultaat van Schur. Als λ_i (met $1 \leq i \leq n$) de eigenwaarden zijn van de complexe matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, dan gaat de volgende ongelijkheid op, met gelijkheid als en slechts als $A^* \cdot A = A \cdot A^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Pas deze stelling toe op de volgende matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Er geldt dat alle eigenwaarden van deze matrix gelijk zijn aan het meetkundig gemiddelde van de a_i's, zodat $n\mathsf{GM}(a_1, \ldots, a_n)^2 = n\mathsf{GM}(a_1^2, \ldots, a_n^2) \leq \sum a_i^2$. Vervang de a_i's door hun vierkantswortel en de gevraagde ongelijkheid volgt. ■

2.13 Thermodynamica

Dit interessante argument steunt op de wetten van de thermodynamica, waardoor diens mathematische bewijskracht begrijpelijkerwijs wat aan kritiek onderhevig is.

We willen AM-GM aantonen voor een lijst van getallen x_i. Beschouw n identieke warmtereservoirs met dezelfde warmtecapaciteit c, die de waarden van x_i als temperaturen hebben. Breng deze reservoirs met elkaar in contact, zodat de situatie naar een evenwichtstemperatuur A evolueert.

De eerste wet van de thermodynamica (behoud van energie) impliceert dat A precies het rekenkundig gemiddelde van de initiële temperaturen is, $\mathsf{AM}(x_1, \ldots x_n)$.

De tweede wet van de thermodynamica stelt dat de entropie van het systeem almaar toeneemt tot de evenwichtstoestand, waar het maximum wordt bereikt. De bijhorende formule is voor een verandering in entropie is:

$$\Delta S = c \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Hierin stellen c de warmtecapaciteit, T_0 de initiële temperatuur en T de eindtemperatuur voor. Concreet, in deze situatie is T_i voor elk reservoir gelijk aan A en $T_{0,i}$ gelijk aan x_i. De totale entropie is niet afgenomen, dus:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot \ln\left(\frac{A}{x_i}\right) \geq 0$$

Door de som van logaritmes te schrijven als een logaritme van een product, zien we ook het meetkundig gemiddelde opduiken, zodat geldt (herinner je dat $A = \mathsf{AM}(x_1, \ldots x_n)$):

$$\frac{\mathsf{AM}^n}{\mathsf{GM}^n} \geq 1$$

Het te bewijzen is duidelijk. ■
