PUMAthematics

6 maart 2012

Antwoorden

1 Een vierkant versnijden

We merken eerst op dat het euclidisch vlak door n rechten hoogstens in $1+1+2+3+...+n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$ verdeeld kan worden en dat deze bovengrens altijd bereikt kan worden. Dit doen we per inductie. Het is duidelijk dat 1 rechte het vlak in 2 delen verdeelt. Stel dat we $n-1$ rechten het vlak in het maximale aantal delen $(1+1+2+3+...+n-1)$ verdeelt. Als we hieraan een n-de rechte toevoegen is het aantal delen waarin de n rechten het vlak verdelen $1+1+2+3+...+n$ plus het aantal delen waardoor de n'de rechte gaat. Als we deze rechte doorlopen verandert ze van deel wanneer ze minstens één van de oorspronkelijk rechten snijdt. Deze rechte verandert dus hoogstens $n-1$ keer van deel en gaat dus hoogstens door n delen. Omdat we in het euclidische vlak werken kunnen we de n'de rechte ook echt zo kiezen dat deze elk van de oorspronkelijke rechten in verschillende punten snijdt. Nu moeten we enkel een vierkant zo groot kiezen dat elk van de delen een niet ledige doorsnede heeft met het vierkant.

2 Een divergente rij

- L kan elke eindige kardinaliteit groter dan 1 hebben. Als we $|L| = m$ willen, neem dan voor $x_n = 1/k$ met $k \in \{1, ..., m\}$ als $n \equiv k \pmod{m}$. Deze rij is duidelijk niet convergent voor $m > 1$ want deze rij bevat oneindig veel keer 1 en oneindig veel keer $1/2$. Een deelrij van deze rij is convergent als en slechts als er een unieke $k \in \{1, ..., m\}$ bestaat zodanig dat $1/k$ oneindig veel keer voorkomt in deze rij en dan is $1/k$ natuurlijk ook de limiet van deze rij.
- $|L| = 0$ kan niet want elke rij in een compact interval heeft een convergente deelrij.
- $|L| = 1$ kan niet. Zij $(x_{n_m})_m$ een deelrij die convergeert naar x. Als voor elke $k \in \mathbb{N}$ het aantal elementen van de rij $(x_n)_n$ dat niet in $]x-1/k, x+1/k[$ zit eindig is, dan convergeert de rij naar x wat tegen onze onderstelling is. voor een zekere k zijn er dus oneindig veel element van de rij in $[0, x-1/k]$ of in $[x+1/k, 1]$, deze oneindig veel elementen van de rij zitten in een compact interval hebben een deelrij die convergeert naar een element van dat compact interval en dus convergeert naar iets verschillend van x.

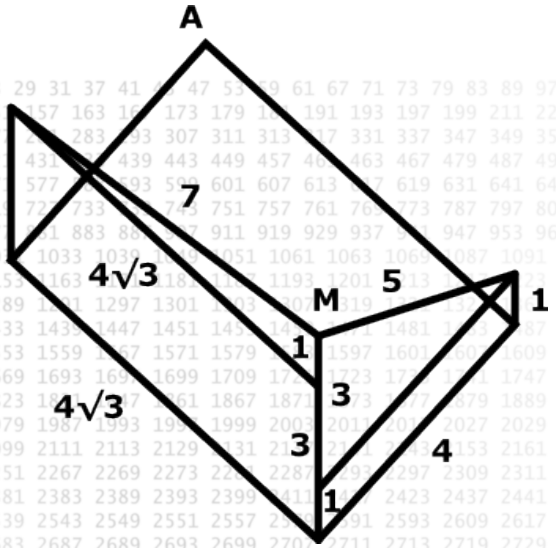
- $|L| = |\mathbb{N}|$ kan wel. Neem voor de rij: $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Deze rij convergeert niet want deze rij bevat 1 en 1/2 oneindig veel keer. Deze rij bevat een deelrij $(1/k)_m$ voor elke $k \in \mathbb{N}$. Een convergente deelrij van deze rij geldt ofwel dat deze voor een unieke $k \in \mathbb{N}$ $1/k$ oneindig veel keer bevat, ofwel bevat deze rij een deelrij van $(1/n)_n$ en convergeert hij dus naar 0. Dus $L = \{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$.
- $|L| = |\mathbb{R}|$ kan ook. Beschouw $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. $\mathbb{Q}$ is aftelbaar dus Q ook. Men kan dus een rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ nemen zodanig dat $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\} = Q$. Deze rij is duidelijk niet convergent want deze bevat oneindig veel waarden kleiner dan 0.1 en oneindig veel waarden groter dan 0.9. Q is dicht in $[0,1]$ dus $|L| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$.

3 Een determinant

Voor elke i en j vermenigvuldigen we de j-de kolom van A met $j!$ en de i-de rij met $1/(i-1)!$. We krijgen dus $\det(A) = \prod_{i=1}^{n}(i-1)! \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \det(B) = \frac{1}{n!} \det(B)$, met $B = (b_{ij})$, waarbij $b_{ij} = \binom{j}{i-1}$. Trekken we nu in de matrix B van de laatste kolom de voorlaatste af, van de voorlaatste de voor voorlaatste enz. Dan krijgen we wegens de formule van Pascal: $\det(A) = \frac{1}{n!} \det(B^{(1)})$ met $B^{(1)} = (b_{ij}^{(1)})$, waarbij $b_{ij}^{(1)} = \binom{j-1}{i-1}$. We herhalen dit op de laatste $n-1$ kolommen en daarna op de laatste $n-2$ kolommen enz. Zo bekomen we $\det(A) = \frac{1}{n!} \det(B^{(n-1)})$ met $B^{(n-1)} = (b_{ij}^{(n-1)})$, waarbij $b_{ij}^{(n-1)} = \binom{j-j+1}{i-1}$. $B^{(n-1)}$ is dus een matrix met op de diagonaal en vlak onder de diagonaal enen en voor de rest alleen maar nullen en dus $\det(A) = \frac{1}{n!}$.

4 Stereometrie

De afstand tussen het vlak en het midden van de bol is uiteraard de straal van de bol. De afstand tussen de as van een cilinder en het midden van de bol is de som van de straal van de bol en de straal van de cilinder. Men bekomt hierdoor en door de stelling van Pythagoras de waarden op de schets hieronder. Waaruit we zien dat $|AM| = \sqrt{4^2 + 3 \cdot 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.



5 Het PUMA-lemniscaat

De eindpunten van zo'n lijnstuk als beschreven is in de opgave hebben als coördinaten: $(-1, y)$ en (x^2, x) met $(x^2+1)^2+(y-x)^2 = 8$. Waaruit we bekomen dat $y = x \pm \sqrt{8-(x^2+1)^2}$. Een punt op de kromme is een punt met coördinaten

$$\left(\frac{x^2-1}{2}, x \pm \frac{1}{2}\sqrt{8-(x^2+1)^2}\right).$$

Stellen we $u = \frac{x^2-1}{2}$, dus $x = \pm\sqrt{2u+1}$ dan vinden we de functies die de kromme beschrijven. De kromme wordt dus beschreven door

$$f_{\pm_1\pm_2}(u) = \pm_1\sqrt{2u+1} \pm_2 \sqrt{2-(u+1)^2}.$$

Het is duidelijk dat het domein $-1/2 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}-1$ is. We kunnen opmerken dat f_{--} en f_{++} niet van teken veranderen en dat f_{+-} en f_{-+} hetzelfde nulpunt hebben, namelijk het punt waarvoor $\sqrt{2u+1} = \sqrt{2-(u+1)^2}$ dus het punt waar $4u+u^2 = 0$ dus enkel het punt $u = 0$ binnen het domein. We stellen $g(u) = \sqrt{2u+1}$ en $h(u) = \sqrt{2-(u+1)^2}$. We weten dat $g(u) < h(u)$ voor $u < 0$ en $g(u) > h(u)$ voor $u > 0$. We zoeken het deel van de oppervlakte langs de positieve kan van de as dus

$$\int_{-1/2}^{\sqrt{2}-1} f_{++} - |f_{+-}| = \int_{-1/2}^{0} g+h+g-h + \int_{0}^{\sqrt{2}-1} g+h-g+h = 2\int_{-1/2}^{0} g + 2\int_{0}^{\sqrt{2}-1} h.$$

We kunnen dit nu berekenen (we stellen $u+1=\sqrt{2}\sin(t)$).

$$\int_0^{\sqrt{2}-1}\sqrt{2-(u+1)^2}du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos(t)^2dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2t)+1)dt=[\frac{\sin(2t)}{2}+t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Ook de andere integraal kunnen we bepalen.

$$\int_{-1/2}^{0}\sqrt{2u+1}du=[1/3\sqrt{2u+1}^3]_{-1/2}^{0}=1/3$$

De oppervlakte langs de positieve kant van de as is dus $\pi/2-1+2/3$, wegens symmetrie is de totale gezochte oppervlakte dus $\pi-2/3$.

6 Luchtaanval

De kanonnen kiezen hun doelwitten willekeurig. De kans dat voor elke i het i'de vliegtuig door juist k_i kanonnen beschoten wordt is $\frac{\binom{n}{k_1\ldots k_m}}{m^n}$. De kans dat een vliegtuig dat door k_i kanonnen beschoten wordt niet neergehaald wordt, is $\left(\frac{1}{4}\right)^{k_i}$. Het verwachte aantal vliegtuigen dat niet neergehaald wordt is dus:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1+\ldots+k_m=n}\frac{\binom{n}{k_1\ldots k_m}}{m^n}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{k_1}+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{k_m}\right)\\
&=\sum\frac{\binom{n}{k_1\ldots k_m}}{m^n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_1}+\ldots+\sum\frac{\binom{n}{k_1\ldots k_m}}{m^n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_m}\\
&=\frac{1}{m^n}\left(\frac{1}{4}+1+\ldots+1\right)^n+\ldots+\frac{1}{m^n}\left(1+\ldots+1+\frac{1}{4}\right)^n\\
&=\frac{1}{m^n}m\left(m-\frac{3}{4}\right)^n\\
&=m\left(1-\frac{3}{4m}\right)^n
\end{aligned}$$