PUMAthematics

1 maart 2011

Antwoorden

1 Een grens op priemgetallen

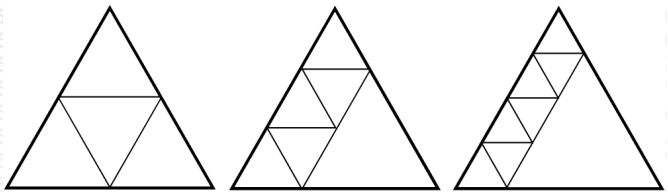
Uit het bewijs van Euclides voor de oneindigheid van de priemgetallen weten we dat $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot p_2 \ldots p_n + 1$. Voor $n = 1$ is de bovengrens $2 \leqslant e$ duidelijk voldaan. We gebruiken nu volledige inductie. Onderstel dat de bovengrens voldaan is voor $1, 2 \ldots n$. Dan volgt

$$p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot p_2 \ldots p_n + 1 \leqslant e^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} + 1 \leqslant e \cdot e^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} = e^{2^n} .$$

Dit is juist de gezochte bovengrens voor p_{n+1}.

2 Driehoeken delen

We kunnen de driehoek opdelen zoals in onderstaande afbeelding. De eerste methode geeft 3 driehoeken meer dan het oorspronkelijke aantal. De tweede geeft 5 driehoeken meer dan het oorspronkelijke aantal. De derde geeft 7 driehoeken meer dan het oorspronkelijke aantal. Door in een deeldriehoek nu opnieuw deze methodes toe te passen, kunnen we deze aantallen samentellen. Opdelen in 1 driehoek is duidelijk mogelijk, namelijk niet opdelen. Opdelen in 4 is de eerste afbeelding hieronder. Opdelen in 6 is de tweede afbeelding. Om op te delen in 7 doen we eerst de opdeling in 4, en herhalen we die methode dan, om zo $4 + 3$ driehoeken te krijgen. Om 8 driehoeken te verkrijgen gebruiken we de derde afbeelding hieronder. Door nu recursief de +3-methode te gebruiken, kunnen we elk mogelijk getal $\geqslant 6$ verkrijgen.



3 Kleurrijk veelvlak

Stel dat de drie kleuren rood, groen en blauw zijn. Beschouw de verzameling $\mathcal{R}_{rg}$ van ribben die aan de ene kant rood en aan de andere kant groen gekleurd zijn (dus de ribben die een rood en een groen hoekpunt verbinden). Noem de verzameling zijvlakken $\mathcal{V}$. We tellen dan nu het aantal elementen in de verzameling $U = \{(R, V) \in \mathcal{R}_{rg} \times \mathcal{V} \mid R \text{ is een ribbe van } V\}$. Voor elke ribbe in $\mathcal{R}_{rg}$ in zijn er twee zijvlakken die eraan grenzen, zodat enerzijds $|U| = 2 \cdot |\mathcal{R}_{rg}|$. Fixeren we nu eerst een vlak, dan heeft dat vlak ofwel 0 ribben uit $\mathcal{R}_{rg}$, als het vlak minstens één van de kleuren groen en rood niet heeft. Ofwel heeft dat vlak juist 1 zo'n ribbe, en dan is het derde hoekpunt dat niet op die ribbe ligt in het blauw gekleurd. Ofwel heeft dat vlak 2 zo'n ribben, als het één van de toppen groen (resp. rood) is, en de twee andere rood (resp. groen) zijn. Noemen we de verzamelingen van elk van deze drie soorten vlakken respectievelijk $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$, dan vinden we

$$|U| = 0 \cdot |\mathcal{V}_0| + 1 \cdot |\mathcal{V}_1| + 2 \cdot |\mathcal{V}_2| = 2 \cdot |\mathcal{R}_{rg}| \,.$$

Hieruit zien we dat $\mathcal{V}_1$, de verzameling vlakken met de drie kleuren als hoekpunten, even moet zijn.

4 Kleinste gemene veelvouden

(a) Daar $n!$ een gemeen veelvoud is van $1, 2, \ldots, n$, is $\text{kgv}(1, 2, \ldots, n) \leqslant n!$. Omdat ook teller en noemer strikt positieve getallen zijn, hebben we dus $0 < a_n \leqslant 1$. Omdat $\text{kgv}(1, 2, \ldots, n+1) \leqslant \text{kgv}(1, 2, \ldots, n) \cdot (n+1)$, hebben we

$$a_{n+1} = \frac{\text{kgv}(1, 2, \ldots, n+1))}{(n+1)!} \leqslant \frac{\text{kgv}(1, 2, \ldots, n) \cdot (n+1)}{(n+1)!} = a_n \,.$$

De rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ is dus een dalende, begrensde rij. Er volgt dus dat de rij convergeert.

Om de limiet te bepalen, beschouwen we de deelrij bepaald door de kwadraten priemgetallen. Voor elk priemgetal p geldt dat $\text{kgv}(1, 2, \ldots, p^2)$ hoogstens 2 factoren p heeft. Maar $(p^2)!$ heeft zeker 3 factoren p, dus $a_{p^2} \leqslant \frac{1}{p}$ voor alle priemgetallen p. De rij $(a_{p_i^2})_{i=1}^{\infty}$ is een deelrij die naar 0 convergeert, zodat door ook

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \,.$$

(b) Als $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ zou convergeren, zou elke deelrij dezelfde limiet hebben. Noem het k-de priemgetal p_k. Voor elke k geldt dat $\mathrm{kgv}(1,2,\ldots,p_k) = \mathrm{kgv}(1,2,\ldots,p_k-1)\cdot p_k$, zodat

$$\lim_{k\to\infty} b_{p_k} = 0\,.$$

Zij nu $k > 1$, zodat p_k minstens 3 is. Dan is $\mathrm{kgv}(1,2,\ldots,2\cdot p_k-1) = \mathrm{kgv}(1,2,\ldots,2\cdot p_k)$, aangezien er enkel een factor 2 en p_k kan toegevoegd worden, maar die zitten al in het linkerlid. Hieruit volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} b_{2\cdot p_k} = 1\,.$$

We hebben dus twee deelrijen met verschillende limieten. Hieruit volgt dat $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ niet convergeert.

5 Festiviteiten op een π-ratenschip

Het is eenvoudig te tellen dat er $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ gangen zijn. Bij één bezoekdag gaat een π-raat naar de 9 anderen, en dan terug naar zijn eigen sectie. Elke 14 maart sluiten er dus 9 gangen. Deze traditie kan dus hoogstens 4 keer uitgevoerd worden. We kunnen de eerste rondgang van een π-raat gebruiken om de π-raten een nummer te geven, naargelang de volgorde waarin ze bezocht worden. Zo wordt de eerste rondgang:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 1\,.$$

Daar een rondgang altijd zo'n cykel is, kunnen we onderstellen dat de eerste π-raat steeds de rondgang doet. Om nu aan te tonen dat de traditie 4 keer uitgevoerd kan worden, moeten we ook 4 zo'n rondgangen vinden, die nooit dezelfde gang gebruiken.
Om een beetje zich op het probleem te krijgen, kan je het eens proberen met 7 π-raten. Dat is gemakkelijker, omdat 7 priem is. Je kan dan als 2 andere rondgangen $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1$ en $1 \to 4 \to 7 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1$ nemen, dus bepaald door het overslaan van telkens 2 resp. 3 π-raten.
Voor 9 werkt deze methode echter niet, omdat het telkens overslaan van 3 π-raten ervoor zorgt dat de eerste piraat na 3 stappen al terug in zijn eigen sectie is. We kunnen echter wel één van de mogelijke andere coprieme stapgrootes nemen, en dan met de overschot nog twee cykels proberen te maken. Wat zoekwerk geeft dan de volgende 3 andere rondgangen:

$$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 1;$$
$$1 \to 4 \to 7 \to 2 \to 5 \to 8 \to 3 \to 9 \to 6 \to 1;$$
$$1 \to 5 \to 9 \to 4 \to 8 \to 2 \to 6 \to 3 \to 7 \to 1.$$

6 Natuurlijke probabiliteit

Laat ons even onderstellen dat zo'n functie f bestaat. Zij $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ en stel de priemfactorisatie van $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$. Zij $q_1, q_2, \dots$ alle priemgetallen, behalve $p_1, \dots p_k$. Zij $V = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall i : q_i \nmid x\}$, m.a.w. V bestaat uit de natuurlijke getallen die enkel priemfactoren $p_1, \dots, p_k$ heeft. We bepalen de kans dat een willekeurig getal X in V zit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X \in V) &= \mathcal{P}(q_1 \nmid X \text{ en } q_2 \nmid X \text{ en } q_3 \nmid X \dots) \\
&= \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \\
&= \frac{\left(\prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_1})\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots}{\left(\prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_1})\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt doordat deze geldt voor elke eindige verzameling q's, en we de limiet mogen nemen. Daar $0 = \mathcal{P}(X \in V) = \sum_{x \in V} f(x)$ en $f(x) \geqslant 0$ voor alle x, hebben we dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in V$. I.h.b. is $f(n) = 0$. Omdat n willekeurig was, is dus $f(n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Omdat $\sum_{x \in \mathbb{N}} f(x) = 1$ is dus $f(0) = 1$. Maar ook $\sum_{x \in \mathbb{N}} f(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$, dus ook $f(0) = \frac{1}{2}$. Dit is een strijdigheid, dus f kan niet bestaan.