



COMA Computational Mathematics

9 november 2010

Vragen

1 Harmonie ($\sqrt{2}$ punten)

Beschouw de reekssom $S_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/k$. Bepaal de kleinste waarde van k waarvoor $S_k > 4\pi$.

2 Gemene Veelvouden ($\sqrt{3}$ punten)

Zij m het kleinste gemene veelvoud van de getallen van 1 tot en met 2^{22} . Hoeveel priemfactoren heeft m , geteld met multipliciteit? (bijvoorbeeld $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ heeft 4 priemfactoren)

3 Is er meer te zien dan ooit iemand kon zien ($\sqrt{5}$ punten)

We definiëren de Fibonacci-getallen als $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. Zij s de alternerende som van de eerste 5040302010 Fibonacci-getallen, dus

$$s = F_0 - F_1 + F_2 - \dots + F_{5040302010}.$$

Bepaal s modulo 139.

4 Scheve toren ($\sqrt{7}$ punten)

Zij $n = 49^{(49^{49})}$. Wat zijn de eerste 5 cijfers van het getal n ?



COMA computational
thematics

9 november 2010

5 Punten tellen

($\sqrt{11}$ punten)

Beschouw de kromme C in het affiene vlak met als vergelijking

$$2y^2 = 7x^3 - 5x + 2.$$

Voor elk priemgetal p definiëren we $N_p(C)$ als het aantal affiene punten op C over het veld $\text{GF}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$. Met andere woorden $N_p(C)$ is het aantal koppels $(x, y) \in \{0, 1, \dots, p-1\} \times \{0, 1, \dots, p-1\}$ waarvoor geldt dat $2y^2 \equiv 7x^3 - 5x + 2 \pmod{p}$.

Zij nu M de verzameling van alle priemgetallen waarvoor $N_p(C) = p$. Geef een eenvoudige beschrijving van de verzameling M . (Met “eenvoudige beschrijving” bedoelen we dat je bijvoorbeeld gemakkelijk moet kunnen zien of pakweg het priemgetal $10^{100} + 267$ al dan niet in M zit.)

6 Spoorzoeken

($\sqrt{13}$ punten)

Beschouw de matrix $M \in \mathbb{R}^{2010 \times 2010}$:

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2009}{2010} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{2010}{2011} \end{bmatrix}$$

Bepaal het spoor van de matrix M^{-1} , afgerond tot op zes decimalen na de komma.