



COMA computational
thematics

9 november 2010

Vragen

1 Harmonie ($\sqrt{2}$ punten)

Beschouw de reekssom $S_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/k$. Bepaal de kleinste waarde van k waarvoor $S_k > 4\pi$.

Antwoord: 160999

Oplossing: Initialiseer $k = 1$ en $S = 0$. We kunnen dan while-lusje laten lopen waarin k telkens met 1 wordt verhoogd en S met $1/k$, zolang $S \leq 4\pi$. Na afloop van de while-lus heeft k de gezochte waarde.

2 Gemene Veelvouden ($\sqrt{3}$ punten)

Zij m het kleinste gemene veelvoud van de getallen van 1 tot en met 2^{22} . Hoeveel priemfactoren heeft m , geteld met multipliciteit? (bijvoorbeeld $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ heeft 4 priemfactoren)

Antwoord: 296347

Oplossing: Beschouw het kleinste gemeen veelvoud m van de getallen $1, \dots, n$. Het is duidelijk dat elk priemgetal $p \leq n$ een factor van m zal zijn. Als $p^i \leq n$, dan moet $p^i \mid m$ en als $p^i > n$ dan is geen van de getallen kleiner dan n deelbaar door p^i en bijgevolg is dan $p^i \nmid m$. Het volgt dat de macht van p in de priemontbinding van m precies gelijk is aan $\lfloor \log_p(n) \rfloor$. De oplossing van het probleem is dus $\sum_{p \leq n} \lfloor \log_p(n) \rfloor$, waarbij de som enkel over de priemen loopt.



COMA^{Computational}thematics

9 november 2010

3 Is er meer te zien dan ooit iemand kon zien ($\sqrt{5}$ punten)

We definiëren de Fibonacci-getallen als $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. Zij s de alternerende som van de eerste 5040302010 Fibonacci-getallen, dus

$$s = F_0 - F_1 + F_2 - \dots + F_{5040302010}.$$

Bepaal s modulo 139.

Antwoord: 33

Oplossing: Je kan gauw ontdekken dat $\sum_{i=1}^n (-1)^i F_i = (-1)^n F_{n-1} - 1$, wat met inductie meteen bewezen is. De opgave komt dus neer op het bepalen van $F_{5040302009} \pmod{139}$. Je kon ook ontdekken dat $F_i \equiv F_j \pmod{139}$ zodra $i \equiv j \pmod{46}$. Vermits $5040302009 \equiv 37 \pmod{46}$, is $s = F_{37} - 1 \pmod{139} = 33$.

Alternatief: Als alternatief kon je gebruik maken van

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Een grote macht van deze matrix kan je bijvoorbeeld berekenen met het bekende ‘binary powering’ (of ‘exponentiation by squaring’) modulo 139.

Alternatief: Omdat 139 priem is kon je de matrix ook diagonaliseren over het veld $\mathbb{F}_{139}$ en zo de volgende expliciete formule vinden (of meteen opzoeken op internet):

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} \quad \text{met } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Aangezien $12^2 \equiv 5 \pmod{139}$, geldt $\phi \equiv 76 \pmod{139}$. Met behulp van modulaire machtverheffing in Sage of Maple (of een implementatie ervan in je favoriete taal¹) kan je $76^{5040302009} \pmod{139} = 27$ berekenen. Daarnaast is $27^{-1} \equiv 103$. Het antwoord is dus

$$\frac{27 + 103}{12} - 1 \equiv 58 \cdot 130 - 1 \equiv 33 \pmod{139}.$$

¹bvb. <http://faculty.washington.edu/moishe/tcss342/PowerMod.java>



COMA Computational
thematics

9 november 2010

4 Scheve toren

($\sqrt{7}$ punten)

Zij $n = 49^{(49^{49})}$. Wat zijn de eerste 5 cijfers van het getal n ?

Antwoord: 11001

Oplossing: Zij A een willekeurig reëel getal, dan zijn de eerste cijfers van 10^A dezelfde als die van 10^{A-m} , voor $m \in \mathbb{N}$. In het bijzonder geldt dit voor $m = \lfloor A \rfloor$. We kijken dus naar $10^{A-\lfloor A \rfloor}$: vermits $0 \leq A - \lfloor A \rfloor < 1$ zal $1 \leq 10^{A-\lfloor A \rfloor} < 10$, dus de eerste vijf cijfers zijn precies $\lfloor 10^4 10^{A-\lfloor A \rfloor} \rfloor$. Merk nu op dat $n = 10^{49^{49} \log 49}$ (tiendelig logaritme) en het volgt dat het antwoord gegeven is door

$$\lfloor 10^{49^{49} \log 49 - \lfloor 49^{49} \log 49 \rfloor + 4} \rfloor = 11001$$

5 Punten tellen

($\sqrt{11}$ punten)

Beschouw de kromme $\mathcal{C}$ in het affiene vlak met als vergelijking

$$2y^2 = 7x^3 - 5x + 2.$$

Voor elk priemgetal p definiëren we $N_p(\mathcal{C})$ als het aantal affiene punten op $\mathcal{C}$ over het veld $\text{GF}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$. Met andere woorden $N_p(\mathcal{C})$ is het aantal koppels $(x, y) \in \{0, 1, \dots, p-1\} \times \{0, 1, \dots, p-1\}$ waarvoor geldt dat $2y^2 \equiv 7x^3 - 5x + 2 \pmod{p}$.

Zij nu M de verzameling van alle priemgetallen waarvoor $N_p(\mathcal{C}) = p$. Geef een eenvoudige beschrijving van de verzameling M . (Met “eenvoudige beschrijving” bedoelen we dat je bijvoorbeeld gemakkelijk moet kunnen zien of pakweg het priemgetal $10^{100} + 267$ al dan niet in M zit.)

Antwoord: $M = \{3, 5, 7, 13, 17, \dots\}$; M bestaat dus uit de priemgetallen die rest 0, 3, 5 of 6 hebben bij deling door 7.

Oplossing: Voor een gegeven priemgetal p kunnen we met een dubbele for-lus eenvoudig alle koppels $(x, y) \in \mathbb{F}_p^2$ overlopen en nakijken of $(x, y) \in N_p(\mathcal{C})$. Op die manier kunnen we voor kleine priemgetallen makkelijk bepalen of ze al dan niet in M zitten. Als je op die manier bijvoorbeeld de priemen kleiner dan 100 bekijkt die in M zitten, dan kan je volgende vaststelling doen: M bestaat precies uit die priemgetallen die 0, 3, 5 of 6 zijn modulo 7.



COMA Computational Mathematics

9 november 2010

6 Spoorzoeken

($\sqrt{13}$ punten)

Beschouw de matrix $M \in \mathbb{R}^{2010 \times 2010}$:

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2009}{2010} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2010}{2011} \end{bmatrix}$$

Bepaal het spoor van de matrix M^{-1} , afgerond tot op zes decimalen na de komma.

Antwoord: 1.004071

Oplossing: We lossen dit algemener op voor M een $n \times n$ -matrix (met n even) met elementen $a_1, \dots, a_n$ op de diagonaal. We maken gebruik van de formule $M^{-1} = \text{adj}(M)/\det(M)$, met $\text{adj}(M)$ de adjunctmatrix en $\det(M)$ de determinant. Voor de determinant kunnen we gemakkelijk inzien (bv. door ontwikkeling naar de eerste kolom) dat $\det(M) = a_1 a_2 \dots a_n - 1$. Definieer m_{ii} als de (i, i) -minor van M , dit is de determinant van de matrix M waar de i -de rij en i -de kolom uit verwijderd zijn. We krijgen dan

$$\text{tr } M^{-1} = \sum_{i=1}^n (M^{-1})_{ii} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\det M} \text{adj}(M)_{ii} = \frac{1}{\det M} \sum_{i=1}^n m_{ii}.$$

We kunnen deze minoren gemakkelijk uitrekenen, we vinden $m_{ii} = (a_1 a_2 \dots a_n)/a_i$. Uiteindelijk geeft dit

$$\text{tr } M^{-1} = \frac{1}{\det M} \sum_{i=1}^n m_{ii} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_1 a_2 \dots a_n - 1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

Nu is het enkel een kwestie van deze formule toe te passen op de gegeven matrix. We vinden $a_1 \dots a_n = 1/2011$, dus $(a_1 \dots a_n)/(a_1 \dots a_n - 1) = -1/2010$. Daarnaast is $\sum_{i=1}^{2010} a_i = -\sum_{i=1}^{2010} \frac{i+1}{i} = -2010 - H(2010)$. Bijgevolg is $\text{tr } M^{-1} - 1 = H(2010)/2010$. (Hierin is $H(n) = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$.)