Inleiding tot de problem-solving

Prime

30 september 2009

1 a, b, c en d zijn gehele getallen. Bewijs dat $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$ een veelvoud van 12 is.

2 Zij a, b, c, d gehele getallen met $a+b+c+d=0$. Bewijs dat $a^5+b^5+c^5+d^5$ een veelvoud van 30 is.

3 n is een natuurlijk getal en V is een deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ met $n+1$ elementen. Toon aan dat (a) V twee getallen bevat die die onderling ondeelbaar zijn en (b) V twee getallen bevat zodat het ene een veelvoud is van het andere.

4 Op een open veld staan n schutters met een geweer. Elke schutter mikt naar de schutter die het dichtst bij hem staat, en allen halen ze tegelijk de trekker over. Bewijs dat er een schutter in leven blijft.

5 Zoek alle reële veeltermen p die voldoen aan $p(x,y)p(u,v) = p(xu+yv, xv+yu)$.

6 Bepaal alle functies f, gedefinieerd over $\mathbb{Q}^+$ zodanig dat $f(x)+f(1/x) = 1$ en $f(2x) = 2f(f(x))$ voor alle $x \in Q^+$.

7 Vind alle priemgetallen p en q zodat 24 geen deler is van $q+1$ en p^2q+1 een volkomen kwadraat is.

8 Bepaal alle drietallen (x, y, z) van natuurlijke getallen met $x \leq y \leq z$ die voldoen aan

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 3$$

9 A, B en C zijn punten in het vlak met gehele coördinaten; ook de lengtes van de zijden van driehoek ABC zijn geheel. Bewijs dat de omtrek een even getal is.

10 Zij $a_i = \pm 1$, voor $1 \leq i \leq n$. Als $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0$, toon dan aan dat n deelbaar is door 4.

11 Bereken $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$.

12 Toon aan dat $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \leq \frac{5}{4}$

13 Los volgend stelsel op over $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= z\\ (y+z)^2 &= x\\ (z+x)^2 &= y\end{aligned}$$