Afdalen met Vieta

Jan Vonk

9 maart 2009

1 Het extremaalprincipe

Een goede reflex bij het oplossen van problemen die je best aankweekt is het zogenaamde extremaal-principe toepassen. Als je ooit om een of andere reden het niet bestaan van bepaalde objecten wil aantonen, bijvoorbeeld van het maximum van een verzameling, zal deze techniek zeker een nuttig hulpmiddel zijn. Een voorbeeld zal allicht veel verduidelijken:

Probleem. Er staan n mensen in een veld, elk op een verschillende afstand van elkaar. Iedere persoon heeft een geladen pistool en richt dit naar de persoon die het dichtste bij hem staat. Iedereen schiet op hetzelfde ogenblik. Bewijs dat er steeds iemand in leven blijft als n oneven is.

Oplossing. Beschouw de twee mensen die op de kleinst mogelijke afstand van elkaar staan. Deze twee mensen schieten uiteraard op elkaar. Stel dat geen van beiden doelwit is van de overige $n-2$ mensen in het veld, dan laten we deze twee mensen buiten beschouwing, en kijken we naar de $n-2$ overige mensen. Zo verminderen we stap voor stap het aantal mensen met 2, tot we plots een tweetal A en B krijgen waarvan persoon A ook het doelwit is van een van de overige mensen. Deze stap moet voorkomen, aangezien n oneven is, en we door telkens te verminderen met 2 nooit 0 kunnen bereiken. In dat geval zullen twee kogels persoon A treffen, en zal er dus zeker iemand zijn die geen kogels ontvangt.

Figuur 1: Oneindige afdaling

Probleem. Gegeven zijn n boerderijen en n waterputten die over het vlak verspreid zijn. Het is de bedoeling om een rechte weg van elke boerderij naar juist 1 waterput aan te leggen. Bewijs dat de waterputten bijectief aan de boerderijen kunnen toegewezen worden, zodat geen twee wegen elkaar snijden. (Er zijn nooit 3 objecten die op dezelfde rechte liggen.)

Oplossing. Onder alle $n!$ wegennetten beschouwen we het exemplaar met de kleinste som der lengtes van alle wegen. Stel dat in deze bijectie twee wegen elkaar snijden (Noem ze B_iW_m en B_jW_n): Vervangen we deze twee snijdende wegen door B_iW_n en B_jW_m, dan verkrijgen we een weggennet dat een kleinere totale lengte heeft door de driehoeksongelijkheid, contradictie. Het beschouwde wegennet heeft dus geen snijdende wegen.

Problemen

1. Elk roosterpunt van een $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rooster krijgt een natuurlijk getal toegekend. Elk van die getallen is het rekenkundig gemiddelde van zijn 4 buren. Toon aan dat alle getallen gelijk zijn.
2. In een groep van n personen zijn er steeds twee die binnen deze groep evenveel vrienden hebben. (Vriendschap is wederkerig verondersteld)
3. De exacte hoeveelheid benzine die nodig is om met een bepaalde auto een enkel rondje te doen op een parcours, is verdeeld over n containers die langs het parcours geplaatst zijn. Bewijs dat er een startpositie bestaat waar de auto, beginnende met een lege benzinetank, een volledig rondje kan maken over het parcours zonder stil te vallen. (De containers mogen onregelmatig verdeeld zijn over het parcours en de benzine mag onregelmatig verdeeld zijn over de containers.)
4. Los de vergelijking $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ op in gehele getallen.
5. Zoek alle reële oplossingen van $(x+y)^3 = z,\ (x+z)^3 = y,\ (y+z)^3 = x.$
6. Op een feest heeft elke gast hoogstens 3 vijanden. Bewijs dat we de groep in twee kamers kunnen plaatsen zodat iedereen hoogstens 1 vijand heeft in zijn eigen kamer.
7. In elke configuratie van n punten in het vlak, niet allemaal collineair, bestaat er een rechte die exact twee van de gegeven punten bevat.
8. Van $2n+3$ punten in het vlak zijn er geen 3 collineair, en liggen er geen 4 op een cirkel. Bewijs dat we 3 punten kunnen kiezen zodat de cirkel door deze 3 punten zodat er exact n punten binnen, en n punten buiten de cirkel liggen.

2 Vieta-jumping

De methode van *Vieta-jumping* (vaak *root-flipping* genoemd) is toepasbaar op een zeer herkenbare klasse van problemen, die vaak van een bijzonder hoge moeilijkheidsgraad zijn. De problemen waarop deze methode werkt zijn meestal gekarakteriseerd door het concept van deelbaarheid van natuurlijke getallen en het veelvuldig voorkomen van kwadraten.

Figuur 2: Pierre de Fermat

Het basisidee is geworteld in Fermat's methode van de oneindige afdaling. Er wordt een fictieve oplossing gekozen die een bepaalde grootheid minimaliseert, maar waarvoor de te bewijzen eigenschap niet geldt. De gegeven relatie wordt dan als een kwadratische vergelijking in een van de variabelen herschreven. Met behulp van de formules van Vieta wordt vervolgens een oplossing geconstrueerd die de grootheid nog kleiner maakt. De methode algemeen omschrijven is weinig nuttig, ze laat het duidelijkst haar kracht zien wanneer we ze leren kennen in de context van concrete problemen. De problemen die met deze methode oplosbaar zijn, zijn naast zeer herkenbaar ook zeer dun gezaaid. We beginnen met het klassieke voorbeeld, waar overigens een verhaal aan verbonden is.

Dit historisch probleem werd door West-Duitsland voorgesteld voor de IMO in 1988. Geen van de 6 leden van het Australische problem-solving committee vond een oplossing voor het probleem, en gezien de aard van het probleem werd de hulp van de 4 meest vooraanstaande Australische getaltheoretici ingeroepen. Geen van hen kon het probleem oplossen in 6 uur tijd. Nadat het probleem dan toch voorgesteld werd, gemarkeerd met een dubbele asterisk, werd na lange discussie besloten om het in de wedstrijd voor te leggen aan de studenten. Niet minder dan 11 studenten gaven perfecte oplossingen.

Voorbeeld 1 (IMO 1988, Probleem 6)**.** *Zijn a en b natuurlijke getallen zodat $ab+1$ een deler is van a^2+b^2. Bewijs dat $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ een volkomen kwadraat is.*

Bewijs. Stel $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. Fixeer k en beschouw nu

$$\mathcal{S} = \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\mid\; \frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \right\}.$$

We beweren dat er een koppel (a,b) gevonden kan worden in $\mathcal{S}$ met $b=0$. Dit zou impliceren dat $k=a^2$, wat het gestelde zou bewijzen.

Beschouw de oplossing (A, B) die de som $a + b$ minimaliseert. Veronderstel dat k geen volkomen kwadraat is en dat $A \geq B > 0$. De vergelijking

$$\frac{x^2 + B^2}{xB + 1} = k \iff x^2 - kBx + B^2 - k = 0$$

heeft $x = A$ als oplossing. Uit de formules van Vieta halen we nu dat

$$x_2 = kB - A = \frac{B^2 - k}{A}$$

ook een oplossing is. $x_2 = kB - A$ toont dat x_2 een geheel getal is, terwijl $x_2 = \frac{B^2-k}{A}$ toont dat $x_2 \neq 0$, en bovendien dat $x_2 > 0$, want anders zou

$$x_2^2 - kBx_2 + B^2 - k \geq x_2^2 + k + B^2 - k > 0.$$

We hebben nu aangetoond dat (x_2, B) tevens een oplossing is die bovendien voldoet aan $x_2 + B = \frac{B^2-k}{A} + B < A + B$, hetgeen een contradictie is.

Er moet met andere woorden zeker een oplossing bestaan met $b = 0$ en $k = a^2$, hetgeen bewezen moest worden. $\square$

Voorbeeld 2. *Zijn x en y natuurlijke getallen zodat xy een deler is van $x^2 + y^2 + 1$. Bewijs dat*

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3.$$

Bewijs. Stel $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = k$. Fixeer nu k en beschouw de verzameling

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \ \mid \ \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = k \right\}.$$

Neem nu de het koppel (X, Y) in $\mathcal{A}$ dat de minimale waarde van $x + y$ oplevert. Als er meerdere koppels zijn neem er dan willekeurig een van.

Veronderstel dat $X > Y$ en beschouw nu de volgende vergelijking in t:

$$\frac{t^2 + Y^2 + 1}{tY} = k \iff t^2 - kYt + Y^2 + 1 = 0$$

We weten dat $t = X$ een oplossing is van deze vergelijking, en uit de formules van Vieta halen we dat

$$x_2 = kY - X = \frac{Y^2 + 1}{X}$$

ook een oplossing is. Uit $x_2 = kY - X$ halen we dat x_2 een geheel getal is. Verder leiden we af dat $x_2 = \frac{Y^2+1}{X} < X$ en dat bovendien x_2 positief is. Uit al deze informatie besluiten we dat $(x_2, Y) \in \mathcal{A}$, en dat bovendien $x_2 + Y < X + Y$, hetgeen een contradictie is.

Uit het voorgaande leiden we af dat de oplossing die $x + y$ minimaliseert noodzakelijk $x = y$ moet hebben. We krijgen dat $k = \frac{2X^2+1}{X^2}$ en dus dat $X = 1$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Zeer recent dook op de IMO alweer een probleem op dat met deze methode opgelost kon worden, want in 2007 was probleem 5 voor studenten die goed vertrouwd waren met Vieta-jumping allesbehalve onoverkomelijk. Aangezien veel studenten tegenwoordig vertrouwd zijn met de techniek is de situatie enigszins minder legendarisch dan die in 1988.

Problemen

1. (UK Selectietest IMO) Voor welke natuurlijke waarden van n heeft de vergelijking

$$a + b + c + d = n\sqrt{abcd}$$

oplossingen met a, b, c, d natuurlijke getallen?

2. (CRUX Mathematicorum) Zijn a, b, c natuurlijke getallen zodat

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c.$$

Bewijs dat $a^2 + b^2 - abc$ een volkomen kwadraat is.

3. (IMO 2007) Zijn a en b natuurlijke getallen zodat

$$4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2.$$

Bewijs dat $a = b$.