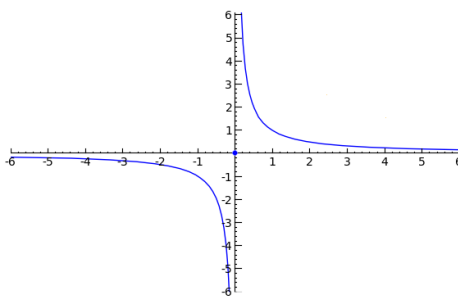


PRIME Puma 2009: oplossingen

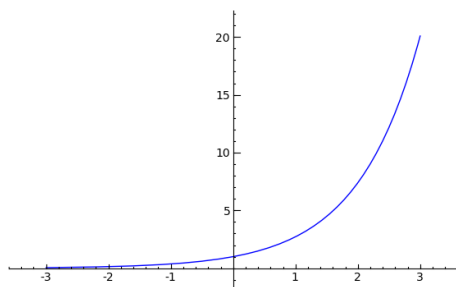
Gent, 23 maart 2009

1 Drie eigenschappen

- (a) Vals. Een tegenvoorbeeld is $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$: deze is injectief en surjectief, maar niet strikt monotoon: $f(0) < f(1) > f(2)$.



- (b) Waar. De surjectiviteit is zelfs niet nodig: stel uit het ongerijmde dat f niet injectief is, met andere woorden er bestaan $x_1 \neq x_2$ met $f(x_1) = f(x_2)$. Als $x_1 > x_2$ of $x_1 < x_2$ dan zou $f(x_1) > f(x_2)$ of $f(x_1) < f(x_2)$ door de strikte monotoniteit. Dus moet toch $x_1 = x_2$, strijdigheid.
- (c) Vals. Een tegenvoorbeeld is $f(x) = e^x$: deze is strikt stijgend en injectief, maar bereikt geen negatieve waarden dus is niet surjectief.



2 Drugs op school

Als iemand bevriend is met een dealer noemen we die een klant. We construeren een geschikte verzameling dealers.

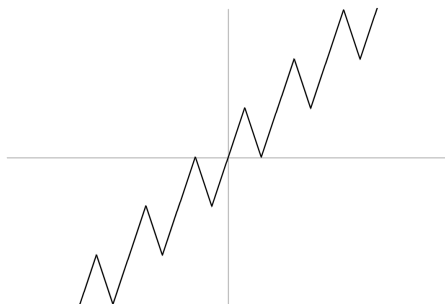
Herhaal volgend proces, tot iedere student ofwel dealer of ofwel klant is:

- kies een willekeurige student die noch dealer noch klant is,
- maak hem dealer,
- noem al zijn vrienden klanten.

Dit proces moet stoppen (want in elke stap stijgt het aantal dealers, maar er kunnen nooit meer dan 2009 dealers zijn, want er zijn maar zoveel studenten in totaal). Wanneer het stopt zijn nooit twee dealers bevriend (gezien we dit steeds zo gekozen hebben bij het aanduiden van dealers) en is iedereen die geen dealer noodzakelijk een klant (anders was het proces nog niet gestopt) en dus per definitie bevriend met een dealer.

3 Driedubbele functie

Beschouw een functie f als op onderstaande grafiek,



deze is continu en voor elke $a \in \mathbb{R}$ heeft $f(x) = a$ precies 3 verschillende reële oplossingen. Een expliciet voorschrift kan je bekomen door één stukje

$$f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[: \begin{cases} 3x & x \in [0, \frac{1}{3}[\\ 2 - 3x & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ 3x - 2 & x \in [\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$$

uit te breiden over gans $\mathbb{R}$ door te definiëren $f(x \pm 1) := f(x) \pm 1$, dan bekom je de grafiek op bovenstaande figuur.

4 Fixrechte

Dat een rechte $\ell = \mathbb{R}\vec{v}$ op zichzelf afgebeeld wordt, wil per definitie zeggen dat $\mathbb{R}A\vec{v} = \mathbb{R}\vec{v}$, dus dat $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Met andere woorden, dit is zo als en slechts als A een reële eigenwaarde λ heeft (met noodzakelijk $\lambda \neq 0$ is daar A niet-singulier is).

- (a) Een voorbeeld van een niet-singuliere reële 2×2 matrix zonder reële eigenwaarden is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, gezien zijn karakteristieke veelterm $x^2 + 1$ is en deze geen reële nulpunten heeft. Hiermee kunnen we een niet-singuliere 2008×2008 matrix construeren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze heeft als karakteristieke veelterm $(x^2 + 1)^{1004}$, een veelterm zonder geen reële nulpunten, dus de matrix heeft geen reële eigenwaarden. De stelling is dus vals.

- (b) De karakteristieke veelterm van een 2009×2009 -matrix heeft graad 2009, en een veelterm van oneven graad heeft altijd een reëel nulpunt (want gaat continu van $-\infty$ naar $+\infty$). De stelling is dus waar.

5 Politie op de bus

Noem een buslijn respectievelijk onbemand, onderbemand, bemand of overbemand als er respectievelijk 0, 1, 2 of meer dan 2 agenten op die buslijn staan. Noem een bushalte onbemand (resp. bemand) als er geen (resp. wel een) agent staat.

- (a) Kies een willekeurige bushalte en noem ze p . We merken eerst op dat het niet mogelijk is dat alle buslijnen door p gaan: had dat wel zo geweest, dan zou door elke andere bushalte p' maar één buslijn gaan (want door p en p' gaat maar één buslijn), terwijl het gegeven zegt dat er meerdere buslijnen door elke bushalte gaan. Dus is er voor elke bushalte p een buslijn L waar p niet op ligt. Door elk van de negen haltes $q_1, \dots, q_9$ op L gaat er een unieke buslijn tegelijk door p en q_i , en elke buslijn door p moet L snijden in één van de bushaltes $q_1, \dots, q_9$. Dus er gaan precies 9 bushaltes door p , en dit voor elke keuze van p .
- (b) Iedere agent staat in een bushalte, dus hij staat op precies negen buslijnen. Op geen enkele van die negen buslijnen mogen nog twee andere agenten staan (anders was ze overbemand), dus moeten de negen andere agenten zo staan dat op elk van die

negen buslijnen juist één andere agent staat. Iedere buslijn is dus ofwel onbemand, ofwel bemand (onderbemand kan niet). Dus moeten er door elke onbemande bushalte $\frac{10}{2} = 5$ bemande buslijnen en $9 - 5 = 4$ onbemande buslijnen gaan.

- (c) Neem een bemande buslijn en bekijk de 7 onbemande haltes erop: gezien er zeven agenten buiten deze buslijn staan, moet er vanuit elk van die haltes een oneven aantal onderbemande buslijnen gaan (en dus minsten één). Maar door elke bemande bushalte in Projectivistan gaat ook juist één onderbemande buslijn (want er gaan 8 bemande buslijnen door: één voor elk van de andere agenten), dus elke onbemande halte op een bemande buslijn ligt op juist één onderbemande buslijn.

Dat wil zeggen dat zodra een onbemande halte op twee onderbemande buslijnen ligt, deze halte op geen enkele bemande buslijn meer kan liggen. Aangezien door elke twee bushaltes een buslijn loopt, is deze halte verbonden met de negen bemande bushaltes, dus lopen door deze bushalte 9 onderbemande buslijnen (en geen andere). Neem dus het snijpunt van twee onderbemande buslijnen (we zagen daarnet dat die bestaan) en plaats hier een agent. Deze negen lijnen worden nu bemand, dus nu staan er 10 agenten en is toch geen enkele bushalte overbemand.

6 Loterij

De rijen van de matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

vormen samen een voorbeeld van een dergelijke invulcombinatie. Immers, iedere lot-totrekking heeft ofwel tweemaal hetzelfde cijfer, ofwel zeker het cijfer 0 én het cijfer 1. Als nul tweemaal voorkomt, dan zal (ongeacht op welke twee posities) er steeds een rij in de linkse matrix zijn waarbij die twee posities ook 0 zijn. Als een niet-nul cijfer tweemaal voorkomt, dan zal de corresponderende rij in de rechtse matrix in minstnes twee posities gelijk zijn aan de lotto-trekking. Als voorgaande niet het geval zijn, moet ieder cijfer éénmaal voorkomen, dus moet er precies één 1 en één 0 voorkomen. Ongeacht de precieze positie heeft ook steeds minstens één van de rijen uit de linkse matrix op die posities ook respectievelijk 1 en 0.