

PRIME Coma 2008

Antwoorden

26 november 2008

1 Padsommen

6782

Een mogelijke oplossingsstrategie is de volgende. In het gegeven codefragment werd telkens het maximum van beide bovenburen opgeteld. Als we overal kunnen bijhouden welk van beide bovenburen dit maximum aanleverde, dan stelt dit ons in staat het maximale pad te reconstrueren. In code kun je dat als volgt neerschrijven, waarbij -1 betekent dat het van linksboven komt en 0 dat het van rechtsboven komt:

```
restart: n:=100: A:=convert(readdata('C:/piramide.txt',integer,n),Matrix);
for i from 2 to n do
  B[i,1]:=[A[i,1]+B[i-1,1][1],0];
  for j from 2 to i do
    if      B[i-1,j-1][1]>B[i-1,j][1] then B[i,j]:=[A[i,j]+B[i-1,j-1][1],-1];
    else if B[i-1,j-1][1]<B[i-1,j][1] then B[i,j]:=[A[i,j]+B[i-1,j][1],0];
    else print([i,j,NIET_UNIEK]); fi;fi;
  end do;
end do;
```

De kolom bepalen waar het maximum langs onder stond kan via

```
kolom:=1:
for i from 2 to 100 do if B[n,i][1]>B[n,kolom][1] then kolom:=i; fi; od;
```

en dan klimmen we langs de piramide op tot we aan 42 zijn, waarbij C het maximale pad is:

```
C[100]:=A[100,kolom]:
for t from 99 to 42 by -1 do
  kolom:=kolom+B[t+1,kolom][2];
  C[t]:=A[t,kolom];
od:
C[42];
```

2 Nieuwe schaakstukken

391433

Een goede manier om dit te vinden zonder overmatig geheugengebruik is de volgende:

- Of de platte toren een vakje (x, y) in 2008 zetten is eenvoudig te bepalen: dit kan als en slechts als x deelbaar is door 2, $x/2 + y$ deelbaar is door 2 én $|x| + \frac{|y|}{2} \leq 2008$ (kleiner mag ook, gezien je heen en terug kan bewegen).
- Een linksdraaiend paard kan na 2 zetten slechts op 8 plaatsen staan, deze 8 punten vormen de hoekpunten en zijdemiddens van een vierkant. We blijven dus steeds als het ware binnen een rooster bewegen, bijgevolg zijn er 2009×2009 mogelijke vakjes waarop het linksdraaiende paard in een even aantal zetten (hoogstens 2008) kan terecht komen. Gezien je desnoods heen en terug kan bewegen, kunnen elk van deze vakjes bereikt worden. We hoeven dus enkel deze 2009^2 vakjes af te lopen en te testen of de toren er kan staan of niet.

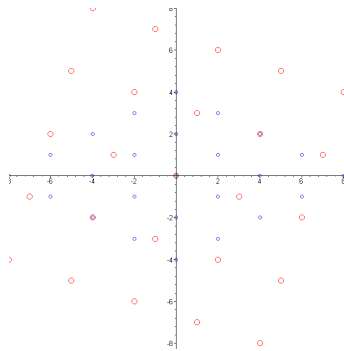


Figure 1: Ter illustratie: voor 4 zetten zijn er slechts 3 mogelijke vakjes.

In code kunnen we dit als volgt opschrijven:

```
bereken := proc(K)
  local X,Y,x,y,i,j,aantal;
  aantal := 0;
  for i from 0 to K do
    for j from 0 to K do
      x:=-2*K+3*j+i; y:=K+j-3*i;
      if ((x mod 2=0) and (x/2+y mod 2=0) and (abs(x)/2+abs(y)<=K)
        then aantal:=aantal+1; fi;
    od;
  od;
  return(aantal);
end proc;
bereken(2008);
```

3 Kronkelige rivier

38237

Ter referentie: het aantal vakjes op de rechteroever bedraagt 43939; de rivier bestaat uit 7824 pixels. (Samen inderdaad $90000 = 300 \times 300$.)

De eenvoudigste manier om tot dit resultaat te komen was waarschijnlijk een 'verfemmer' zoals in paint te implementeren: je gaat alle vakjes op de linkeroever ook zwart kleuren, en telt hoeveel je er gekleurd hebt. Je houdt dus een verzameling Q bij met nog te kleuren vakjes. Zolang Q niet leeg is neem je een willekeurig vakje uit Q , kleur je het zwart en verwijder je het uit Q , waarna je alle witte buurvakjes ervan toevoegt aan Q .

De vakjes die je zo zwart gaat kleuren zijn precies de vakjes die op dezelfde oever liggen als het startvakje. Starten van eenderwelk vakje op de linkeroever (bijvoorbeeld $(1, 1)$) geeft dus het goede antwoord. In code kan je dat snelst doen met een stack of een queue, zoals hieronder:

```
restart: A:=convert(readdata('C:/rivier.txt',integer,300),Matrix);
with(queue):
paint:=proc(A,a,b)
  local Q,elem,x,y,teller;
  Q:=queue[new](); A[a,b]:=1; enqueue(Q, [a,b]); teller:=1;
  while not empty(Q) do
    elem:=dequeue(Q); x:=elem[1]; y:=elem[2]; A[x,y]:=2;
    if x<300 and A[x+1,y]=0 then
      enqueue(Q, [x+1,y]); A[x+1,y]:=1; teller:=teller+1; fi;
    if y<300 and A[x,y+1]=0 then
      enqueue(Q, [x,y+1]); A[x,y+1]:=1; teller:=teller+1; fi;
    if x>1 and A[x-1,y]=0 then
      enqueue(Q, [x-1,y]); A[x-1,y]:=1; teller:=teller+1; fi;
    if y>1 and A[x,y-1]=0 then
      enqueue(Q, [x,y-1]); A[x,y-1]:=1; teller:=teller+1; fi;
  od;
  return teller;
end proc;

paint(A,1,1);
```

4 Kwantummechanica

$$\boxed{1.400 \times 10^{-765}}$$

Noteren we H_n de kans dat het deeltje na stap n op de horizontale as zit, en V_n de kans dat het na stap n op de verticale as zit. We hebben dus $H_n + V_n = 1$ voor alle n , $H_0 = 1$, $V_0 = 0$.

Als een deeltje in stap $n - 1$ op de horizontale as zit, dan zit het in stap n met kans $\cos^2 1$ terug op de horizontale as, en met kans $\sin^2 1$ op de verticale. Als het deeltje in stap $n - 1$ op de verticale as zit, dan zit het in stap n met kans $\cos^2 1$ terug op de verticale as, en met kans $\sin^2 1$ op de horizontale as, met andere woorden

$$\begin{bmatrix} H_n \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 1 & \sin^2 1 \\ \sin^2 1 & \cos^2 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n-1} \\ V_{n-1} \end{bmatrix},$$

zodat

$$\begin{bmatrix} H_n \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 1 & \sin^2 1 \\ \sin^2 1 & \cos^2 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aangezien

$$\begin{bmatrix} \cos^2 1 & \sin^2 1 \\ \sin^2 1 & \cos^2 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 1 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is

$$\begin{bmatrix} \cos^2 1 & \sin^2 1 \\ \sin^2 1 & \cos^2 1 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2 \cos^2(1) - 1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dus is de uiteindelijke kans is, met $q = (2 \cos^2(1) - 1)^{2008}$,

$$\begin{bmatrix} H_{2008} \\ V_{2008} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{q}{2} \end{bmatrix},$$

dus het juiste antwoord is

$$\varepsilon = \frac{(2 \cos^2 1 - 1)^{2008}}{2} = 1.400 \times 10^{-765}.$$